Prologin 2025

Concours national d'informatique

Épreuve écrite d'algorithmique
Lille, Lyon, Rennes, Strasbourg, Rabat

9 février 2025

Cartes à Rebours

Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Vous serez appelé pour passer un entretien d'environ 10 minutes pendant l'épreuve écrite. Par la suite, vous finirez par une épreuve de programmation sur machine de 3 heures et 30 minutes.

Conseils

— Lisez bien tout le sujet avant de commencer.

— **Soignez la présentation** de votre copie.

— N'hésitez pas à poser des questions.

— Vraiment, n'hésitez pas à poser des questions.

— Si vous avez fini en avance, relisez bien.

— N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

— Le barème est donné à titre indicatif uniquement.

— Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.

— Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, décrivez vos stratégies de manière simple et concise, et évitez au maximum les fautes d'orthographe.

— Aucune notion théorique n'est requise pour aborder ce sujet. Nous voulons évaluer vos capacités logiques plus que vos connaissances mathématiques. S'il vous manque des notions pour comprendre un problème, levez la main, un organisateur viendra vous l'expliquer.

— Cependant, si vous connaissez des outils mathématiques adaptés pour résoudre certains exercices, vous êtes libres de les utiliser.

— Le barème récompense les stratégies les plus efficaces : évitez au maximum les coups superflus.

— Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

À propos du sujet

Julia Marchand fait découvrir un nouveau jeu de cartes à Joseph. Joseph vous appelle à l'aide pour étudier en profondeur toutes les subtilités du jeu afin d'obtenir l'avantage. Ce sujet traite principalement de théorie des jeux, mais aucune base de théorie des jeux n'est nécessaire pour aborder le sujet. Toutes les notions requises sont introduites dans le sujet. Si toutefois une notion abordée dans le sujet reste incomprise, il vous est vivement conseillé de demander des explications supplémentaires à un organisateur présent dans la salle.

Le sujet se décompose en 4 sections, qui ne sont **pas** indépendantes. Il est possible de sauter des questions, mais il est vivement conseillé d'aborder les sections dans l'ordre. La plupart des questions demandent de démontrer certains résultats. Il est alors fortement conseillé de réutiliser les résultats des questions précédentes, même si vous n'avez pas réussi à les démontrer. En clair, si une question vous demande de montrer une propriété, même si vous n'avez pas réussi cette question, vous pouvez considérer cette propriété comme acquise pour les questions suivantes.

Le sujet est noté sur un total de 100 points, répartis de la manière suivante :

— Variante 0 détaille les règles originales du jeu, où l'objectif est de faire défausser la dernière carte à votre adversaire. Vous y étudierez quelques mains spécifiques, et les représenterez sous la forme d'un graphe. Cette section vaut 30 points.

— Variante 1 permet une résolution complète du jeu pour la version misère, où l'objectif est cette fois-ci de défausser la dernière carte vous-même. On y étudiera les liens avec le jeu original, et on y abordera des concepts fondamentaux en théorie des jeux, notamment les Nimber, ou *Nombres de Grundy*. Cette section vaut 25 points.

— Variante 2 est une version plus poussée de la Variante 1 où chaque joueur peut se permettre deux actions d'affilée à son tour. On verra alors comment adapter nos stratégies de la Variante 1 afin de conserver l'avantage dans cette nouvelle variante. Cette section vaut 25 points.

— Finalement, Variante k permet de généraliser ce qui a été fait dans la section précédente pour n'importe quel nombre déterminé d'actions d'affilées autorisées. On démontrera dans cette section le théorème de la Simili-Tortue [1], et nous étudierons brièvement quelques règles supplémentaires que nous aurions pu apporter au jeu. Cette section vaut 20 points.

Figure 1 – Julia et Joseph en train de jouer aux Cartes à Rebours

1. Le théorème se nomme ainsi car le jeu original, décrit par Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway et Richard K. Guy, se joue avec des tortues numérotées que l'on retourne à tour de rôle. L'association Prologin ne voulant pas promouvoir la maltraitance animale, on préférera ici jouer avec des cartes.

1 Variante 0

Joseph et Julia jouent à un nouveau jeu de cartes. Leur jeu de cartes comporte 40 cartes, soit 4 occurrences de chaque valeur allant de 1 à 10.

Joseph commence par sélectionner judicieusement 4 cartes, qui forment alors la main de Julia. Le reste des cartes est laissé sur la table, formant la défausse. Les deux joueurs vont ensuite se passer la main en la modifiant, jusqu'à ce que la main soit entièrement défaussée.

Plus précisément, tour à tour :

- Le joueur ayant les cartes en main choisit une carte A parmi les cartes qu'il possède, et la défausse sur la table.
- Ensuite, si possible et s'il le souhaite, il peut soit :
  - Réintroduire une nouvelle carte B au choix, de valeur strictement inférieure à A, depuis la défausse dans sa main,
  - Défausser une autre carte B de valeur strictement inférieure à A de sa main vers la table.
- Le joueur donne alors sa main modifiée à son adversaire.

Le joueur défaussant la dernière carte perd la partie.

Par exemple, voici un exemple de partie de Cartes à Rebours. La première carte A, défaussée, est toujours indiquée en rouge, avec des bandes allant du coin inférieur gauche au coin supérieur droit. Dans le cas où une seconde action est effectuée, (seconde carte défaussée, ou nouvelle carte insérée), la carte B est indiquée en bleu, avec des bandes allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit.

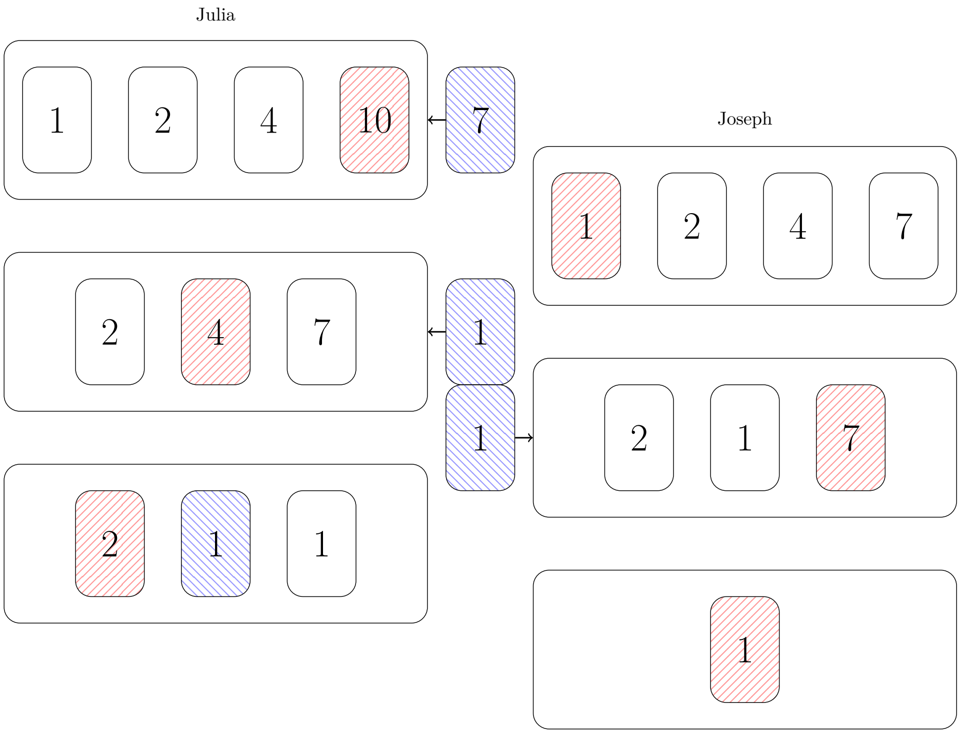


Figure 2 – Exemple de partie de Cartes à Rebours

- Joseph commence par donner à Julia quatre cartes, un 1, un 2, un 4 et un 10.
- Julia choisit de défausser la carte $A = 10$, et introduit à la place une carte de valeur inférieure, $B = 7$, laissant à Joseph les cartes 1, 2, 4 et 7.
- Joseph choisit alors de défausser la carte 1 sans introduire une nouvelle carte, laissant à Julia les cartes 2, 4 et 7.
- Julia choisit alors de défausser la carte $A = 4$ afin d'introduire une carte de valeur inférieure, $B = 1$, laissant à Joseph les cartes 2, 1 et 7.
- Joseph choisit à son tour de défausser la carte $A = 7$, et réintroduit une carte de valeur inférieure, $B = 1$, laissant à Julia les cartes 2, 1 et 1.
- Julia décide cette fois-ci de défausser la carte $A = 2$, et de défausser une seconde carte de valeur inférieure, $B = 1$. Il laisse alors à Joseph une unique carte 1.
- Joseph se défausse de la carte restante, et perd la partie. Julia est ainsi déclarée vainqueure.

Question 1 (2 points)

> Justifier qu'il n'est pas nécessaire d'avoir plus de 4 exemplaires de chaque carte pour jouer une partie de Cartes à Rebours dans la vraie vie.

Question 2 (2 points)

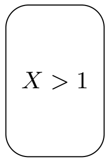
> Justifier le fait que la partie doit finir par se terminer, c'est-à-dire qu'il est impossible pour Joseph et Julia de faire perdurer la partie un nombre infini de coups.[2] Déterminez alors le nombre maximal de tours que peut durer une partie.

Question 3 (1 point)

> Quelle est la seule main qui force un joueur à se défausser de toutes ses cartes, et donc à perdre immédiatement ?

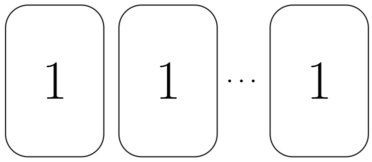
Question 4 (2 points)

> Supposons que Joseph ait dans ses mains une seule carte, qui ne soit pas un 1. Détaillez une stratégie pour Joseph qui lui assurerait la victoire.



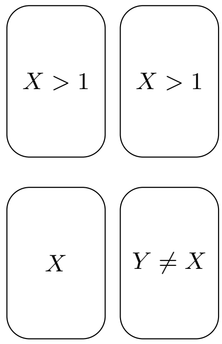
Question 5 (2 points)

> Supposons que Joseph ait dans ses mains N cartes, qui sont toutes des 1. Pour quelles valeurs de N Joseph possède-t-il une stratégie qui lui assurerait la victoire ?



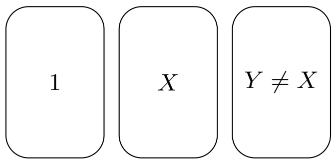
Question 6 (4 points)

> Supposons que Joseph ait dans ses mains deux cartes. Distinguons deux cas que nous n'avons pas encore traité :
> — Joseph possède deux cartes identiques, qui ne sont pas des 1
> — Joseph possède deux cartes différentes
>
> Dans le premier cas, détaillez une contre-stratégie pour Julia qui montre que Joseph ne peut pas gagner à coup sûr. Dans le second cas, détaillez une stratégie qui assure la victoire à Joseph.



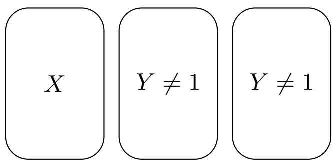
Question 7 (2 points)

> Supposons que Joseph ait dans ses mains trois cartes, dont un 1 et deux cartes X, Y différentes ($X \neq Y$) Détaillez une stratégie pour Joseph qui lui assure la victoire.



Question 8 (2 points)

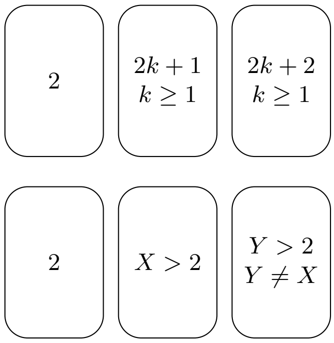
> Supposons que Joseph ait dans ses mains trois cartes, dont au moins deux cartes identiques qui ne sont pas des 1. Détaillez une stratégie pour Joseph qui lui assure la victoire.



---

2. Contrairement au Jeu, qui peut perdurer trèèèès longtemps...

Question 9 (5 points)



$\{X, Y\} \neq \{2k+1, 2k+2\}$

> Supposons que Joseph ait dans ses mains trois cartes, dont un 2. Distinguons deux cas que nous n'avons pas encore traité :
>
> — Les deux autres cartes sont de la forme $2k+1$ et $2k+2$, avec $k \geq 1$ entier,
>
> — Les deux autres cartes sont deux cartes $X \neq Y$, avec $X > 2$ et $Y > 2$, mais pas de la forme $2k+1$ et $2k+2$ entier.
>
> Dans le premier cas, détaillez une contre-stratégie pour Julia qui montre que Joseph ne peut pas gagner à coup sûr. Dans le second cas, détaillez une stratégie qui assure la victoire à Joseph.

Question 10 (3 points)

> Donner un exemple de main gagnante qui n'a pas encore été traitée jusqu'à présent. Justifier en décrivant une stratégie permettant de gagner à coup sûr en ayant cette main.

Question 11 (5 points)

> Représentez les mains étudiées jusqu'à présent sous la forme d'un graphe orienté, où les arcs représentent un coup allant d'une main à une autre. Indiquez de deux couleurs différentes les mains gagnantes et les mains perdantes.
>
> Pour les mains gagnantes, indiquez uniquement avec un arc les coups gagnants. Pour les mains perdantes, indiquez avec un arc tous les coups possibles.

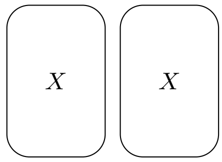
FIGURE 3 – Point de vue d'un candidat Prologin, bien trop déterminé à obtenir l'avantage sur un jeu de cartes.

2 Variante 1

Nous allons étudier ici une autre variante du jeu, où **le gagnant est, au contraire, celui qui se défausse de la dernière carte**.

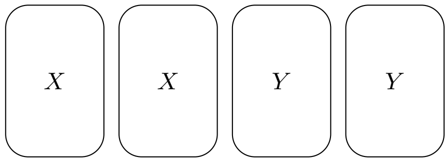
Question 12 (2 points)

> Supposons que, dans cette variante, Joseph ait dans ses mains deux cartes identiques.
> Joseph possède-t-il une stratégie qui lui assurerait la victoire ? Si oui, détailler cette stratégie. Si non, détailler une contre-stratégie pour Julia qui montre que Joseph ne peut pas gagner à coup sûr.



Question 13 (2 points)

> Supposons que, dans cette variante, Joseph ait dans ses mains deux paires de cartes identiques.
> Joseph possède-t'il une stratégie qui lui assurerait la victoire ? Si oui, détailler cette stratégie. Si non, détailler une contre-stratégie pour Julia qui montre que Joseph ne peut pas gagner à coup sûr.



Question 14 (3 points)

> Une main gagnante dans la variante 0 est-elle nécessairement perdante dans la variante 1 ? Au contraire, une main perdante dans la variante 0 est-elle nécessairement gagnante dans la variante 1 ?
> Si oui, justifier, si non, justifier à l'aide d'un contre-exemple.

On définit le *Nimber*[3] d'une main de la façon suivante :

— Le Nimber de la main vide, représentée par le symbole $\emptyset$, est 0

— Pour toute autre main, considérez tous les coups que vous pouvez jouer. Le Nimber de cette main est le plus petit entier qui n'apparaît pas dans l'ensemble des Nimber des mains suivantes.

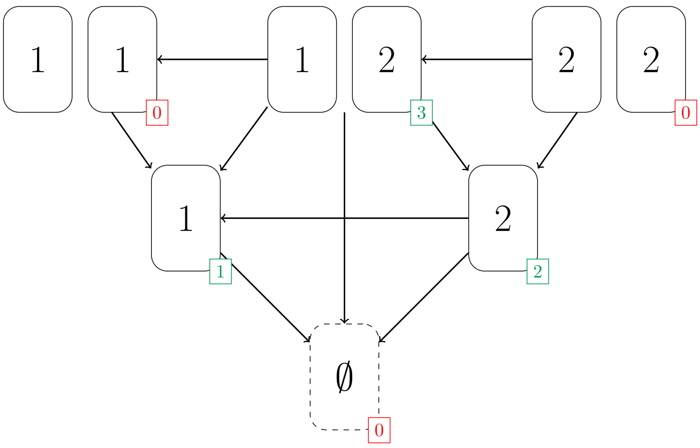


Figure 4 – Nimber de quelques mains

3. La notion de *Nimber*, ou *Nombre de Grundy*, est fondamentale en théorie des jeux, et va être nécessaire à plusieurs reprises par la suite du sujet. Ne pas hésiter à demander à un organisateur si vous n'êtes pas sûr d'avoir compris la notion !

Par exemple :

- Depuis la main (1), il n'y a qu'un coup possible : se défausser de l'unique 1, arrivant à la main vide. Le Nimber de la main vide est 0, alors l'ensemble des Nimber des mains suivantes est $\{0\}$. Le Nimber de la main (1), étant le plus petit entier qui n'apparaît pas dans cet ensemble, est donc 1.
- Depuis la main $(1, 2)$, on peut :
  - Défausser 1 et arriver à la main (2), dont le Nimber est 2,
  - Défausser 2 et arriver à la main (1), dont le Nimber est 1,
  - Défausser 2 et 1 et arriver à la main vide, dont le Nimber est 0,
  - Défausser 2 et réintégrer un 1, pour arriver à la main $(1, 1)$, dont le Nimber est 0.

  L'ensemble des Nimber des mains suivantes est donc $\{0, 1, 2\}$. Le Nimber de la main $(1, 2)$, étant le plus petit entier n'apparaissant pas dans cet ensemble, est donc 3.
- Finalement, depuis la main $(2, 2)$, on peut :
  - Défausser un 2 et arriver à la main (2), dont le Nimber est 2,
  - Défausser un 2 et réintégrer un 1, pour arriver à la main $(1, 2)$, dont le Nimber est 3.

  L'ensemble des Nimber des mains suivantes est donc $\{2, 3\}$. Le Nimber de la main $(2, 2)$, étant le plus petit entier n'apparaissant pas dans cet ensemble, est donc 0.

Question 15 (2 points)

> Pour chacune des mains suivantes, calculez leur Nimber :
> - (3)
> - $(1, 3)$
> - $(2, 3)$
> - $(3, 3)$

Question 16 (3 points)

> Justifiez le fait qu'une main est gagnante si et seulement si son Nimber est différent de 0.

Question 17 (4 points)

> Justifiez le fait que le Nimber d'une main ne contenant qu'une seule carte est égal à la valeur de la carte.

Question 18 (5 points)

> Justifiez le fait que le Nimber d'une main correspond au ou exclusif au niveau du bit [4] des valeurs des cartes dans la main, noté $\oplus$
>
> Indice : Il faut prouver que si une main possède un Nimber de N, alors il est possible d'atteindre en un coup une main ayant n'importe quel Nimber inférieur à N, mais pas N.

Question 19 (4 points)

> Supposons que Julia commence avec les cartes $(1, 2, 4, 10)$. Indiquez l'unique coup gagnant pour Julia.

4. voir annexe

3 Variante 2

On considère une nouvelle variante du jeu, où cette fois-ci un joueur peut défausser ou réinsérer jusqu'à deux cartes.

Plus précisément, tour à tour :

- Le joueur ayant les cartes en main choisit une carte A parmi les cartes qu'il possède, et la défausse sur la table.
- Ensuite, si possible et s'il le souhaite, il peut, **jusqu'à deux fois** :
  - Réintroduire une nouvelle carte B au choix, de valeur strictement inférieure à A, depuis la défausse dans sa main,
  - Défausser une autre carte B de valeur strictement inférieure à A de sa main vers la table.
- Le joueur donne alors sa main modifiée à son adversaire.

Notez que le joueur peut donc défausser une carte A, défausser une seconde carte $B_1 < A$, et réintroduire une troisième carte $B_2 < A$ en un seul tour.

C'est toujours le joueur défaussant la dernière carte qui remporte la partie.

Dans cette variante, les deux joueurs peuvent commencer avec plus que 4 cartes en main. Aussi, on suppose que les joueurs disposent dans la défausse d'un nombre illimité de cartes, de la valeur de leur choix.

Pour simplifier les calculs, on suppose dans cette partie que les joueurs disposent de cartes de valeur 0. Ainsi, un exemple de partie serait $(10, 4, 2, 1) \to (9, 7, 4, 2, 1) \to (0, 4, 2, 1) \to (1) \to (0) \to \emptyset$

Question 20 (4 points)

> Justifier une nouvelle fois le fait que la partie doit finir par se terminer, c'est-à-dire qu'il est impossible pour Joseph et Julia de faire perdurer la partie un nombre infini de coups. Déterminez alors le nombre maximal de tours que peut durer une partie avec comme main initiale $(6, 6)$, appelé *potentiel* de la main.

Question 21 (3 points)

> Déterminez à présent le Nimber des mains suivantes :
> - (0)
> - $(0, 0)$
> - (1)
> - $(1, 1)$
> - (2)
> - (3)

Question 22 (4 points)

> Soit $\mathcal{G}(A)$ le Nimber de la main (A), contenant uniquement la carte A. Justifiez que $\mathcal{G}(A)$ est le plus petit nombre qui n'est pas de la forme 0, $\mathcal{G}(B)$, $\mathcal{G}(B_1) \oplus \mathcal{G}(B_2)$, avec $B, B_1, B_2 < A$.
>
> Indice : on cherche à montrer qu'une main $(X, Y, \dots)$ dans la variante 2 est équivalente à une main $(\mathcal{G}(X), \mathcal{G}(Y), \dots)$ dans la variante 1. On pourra procéder par récurrence forte sur le potentiel de la main.

Question 23 (3 points)

> Calculez les valeurs de $\mathcal{G}(A)$ pour A allant jusqu'à 7.

Question 24 (3 points)

> Supposons que Joseph ait en main les cartes $(0, 3, 4, 5, 6)$. Indiquez un coup gagnant pour Joseph.

Question 25 (4 points)

> Démontrez que $\mathcal{G}(A) = 2A$ ou $2A + 1$, et que le nombre de bits à 1 dans la représentation binaire de $\mathcal{G}(A)$ est forcément impair.

Question 26 (4 points)

> En déduire qu'une main est perdante pour la variante 2 si et seulement si cette même main serait perdante pour la variante 1 et que le nombre de cartes dans la main est pair.

4 Variante k

On considère une infinité de nouvelles variantes du jeu, où cette fois-ci un joueur peut défausser ou réinsérer jusqu'à k cartes.

Plus précisément, tour à tour :

- Le joueur ayant les cartes en main choisit une carte A parmi les cartes qu'il possède, et la défausse sur la table.
- Ensuite, si possible et s'il le souhaite, il peut, **jusqu'à k fois** :
  - Réintroduire une nouvelle carte B au choix, de valeur strictement inférieure à A, depuis la défausse dans sa main,
  - Défausser une autre carte B de valeur strictement inférieure à A de sa main vers la table.
- Le joueur donne alors sa main modifiée à son adversaire.

Notez que le joueur peut donc, par exemple, défausser une carte A, défausser une seconde carte $B_1 < A$, et réintroduire $k-1$ cartes $B_2 < A$ en un seul tour.

C'est toujours le joueur défaussant la dernière carte qui remporte la partie.

Dans cette variante, les deux joueurs peuvent commencer avec plus que 4 cartes en main. Aussi, on suppose que les joueurs disposent dans la défausse d'un nombre illimité de cartes, de la valeur de leur choix.

Pour simplifier les calculs, on suppose dans cette partie que les joueurs disposent de cartes de valeur 0 si et seulement si k est pair.

Théorème de la Simili-Tortue

Si une main (A) possède un Nimber N dans la variante $2m-1$, alors le Nimber de cette même main dans la variante $2m$ sera toujours $2N$ ou $2N+1$, et aura un nombre impair de bits actifs dans sa représentation binaire.

Soit une main dans la variante $2m-1$ (où il n'y a pas de carte 0). On appelle *plongement* le fait de considérer cette même main dans la variante $2m$ (où il y a des cartes 0), dans laquelle on insère une carte 0 si besoin, de sorte que le nombre de cartes dans la main soit pair [5]. Par exemple, le plongement de la main $(2, 3, 4)$ donnerait la main $(0, 2, 3, 4)$ dans la variante supérieure, mais le plongement de la main $(3, 4)$ resterait $(3, 4)$ dans la variante supérieure.

On cherche à prouver que les mains perdantes dans la variante $2m$ sont uniquement les plongements des mains perdantes dans la variante $2m-1$. Dans les deux questions suivantes, on demandera de montrer l'hérédité de la démonstration par récurrence de cette propriété. On peut donc supposer cette propriété vraie pour toute main ayant un potentiel [6] plus faible que la main donnée.

5. Dans le jeu original, la carte 0 ainsi insérée était nommée *Simili-Tortue*, d'où le nom du théorème.
6. Le potentiel correspond au nombre maximal de coups que peut encore durer une main (voir Question 20). En effectuant une récurrence forte sur les mains par ordre des potentiels, on s'assure que l'hypothèse de récurrence est vraie pour toutes les mains suivantes possibles.

Question 27 (3 points)

> Soit une main perdante (c'est-à-dire, de Nimber nul) pour le jeu dans la variante $2m - 1$. Montrez que le plongement de cette main est également perdante dans la variante $2m$.
> Indice : Il suffit de montrer que s'il est impossible d'atteindre une autre main perdante en $2m - 1$ coups dans la variante $2m - 1$, alors il est impossible d'atteindre le plongement d'une autre main perdante en $2m$ coups dans la variante $2m$.

Question 28 (4 points)

> Soit une main dans la variante $2m$ qui n'est **pas** un plongement d'une main perdante dans la variante $2m - 1$. Montrez que cette main est alors gagnante dans la version $2m$.
> Indice : On peut distinguer deux raisons pour laquelle une main n'est pas un plongement d'une main perdante dans la variante $2m - 1$. Dans les deux cas, on peut montrer qu'il existe un coup en $2m$ actions qui mène à une main supposée perdante selon la question précédente.

Question 29 (2 points)

> Démontrez le théorème de la Simili-Tortue.

Question 30 (4 points)

> Calculez la valeur de $\mathcal{G}(n)$, c'est-à-dire le Nimber d'une main contenant uniquement la carte n, dans la variante ∞, où il est possible d'effectuer autant d'actions que désiré. On supposera la présence de cartes de valeur 0.

Question 31 (3 points)

> Résolvez la variante ∞, c'est-à-dire, décrivez toutes les mains gagnantes, et indiquez une stratégie gagnante depuis ces mains-là.

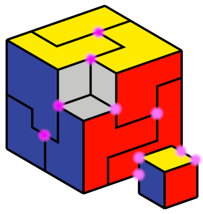
Question 32 (4 points)

> Appelons la variante k-stricte une variante de Cartes à Rebours où un joueur est *obligé* d'effectuer k actions pour k valeurs de B distinctes. Un joueur ne pouvant pas effectuer ses k actions est immédiatement considéré comme perdant.
> Que peut-on dire des valeurs de $\mathcal{G}'(n)$ dans cette variante, comparées aux valeurs de $\mathcal{G}(n)$ dans la variante k traditionnelle ?

5 Bonus

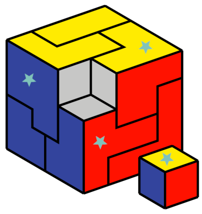
Question bonus 33 (1 point)

Voici le cube de Prologin. Aidez Joseph à trouver un cycle simple [7] sur les arêtes du cube qui passe par chacun des 10 sommets indiqués par un point rose.



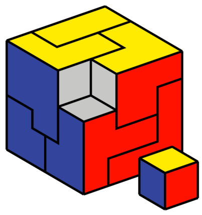
Question bonus 34 (1 point)

Voici le cube de Prologin. Joseph a remarqué que certaines faces de certaines pièces du cube étaient ennemies. Aidez Joseph à trouver un cycle simple sur les arêtes du cube qui sépare les faces indiquées par une étoile, c'est-à-dire, de sorte qu'il n'existe aucune moyen de relier deux étoiles sans intersecter votre cycle, tout en restant à l'intérieur du cube.
Comme Joseph est paresseux, vous n'obtiendrez le point que si votre cycle est identique à la question précédente.



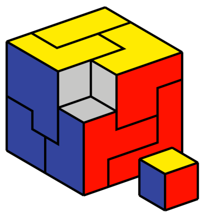
Question bonus 35 (1 point)

Voici le cube de Prologin. Joseph a remarqué qu'il était nécessaire de couvrir une aire précise dans son cycle. Aidez Joseph à trouver un cycle simple sur les arêtes du cube qui inclue précisément 9 des 15 faces du cube à l'intérieur du cycle.
Comme Joseph est paresseux, vous n'obtiendrez le point que si votre cycle est identique à la question précédente.



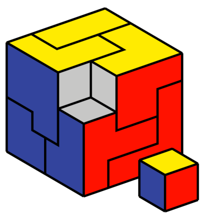
Question bonus 36 (1 point)

Voici le cube de Prologin. Joseph a remarqué que les faces bleues et les faces rouges étaient facilement jalouses. Aidez Joseph à trouver un cycle simple sur les arêtes du cube qui inclue autant de faces rouges que de faces bleues.
Comme Joseph est paresseux, vous n'obtiendrez le point que si votre cycle est identique à la question précédente.



Question bonus 37 (1 point)

Voici le cube de Prologin. Joseph a remarqué que les faces grises du cubes étaient dangereuses. Aidez Joseph à trouver un cycle simple sur les arêtes du cube qui n'inclue **pas** toutes les faces grises à l'intérieur du cycle.
Comme Joseph est paresseux, vous n'obtiendrez le point que si votre cycle est identique à la question précédente.



7. C'est à dire, qui ne passe jamais deux fois par le même sommet

Annexe

Opérations bit à bit En informatique, il est courant de représenter un nombre sous sa forme *binaire* plutôt que décimale. La forme binaire d'un nombre est une manière de le représenter avec seulement deux chiffres, 0 et 1, plutôt que les dix chiffres 0-9 utilisés en décimal.

En décimal, le *poids* du dernier chiffre d'un nombre est 1, l'avant dernier 10, ensuite 100, etc. Le nombre 4321 en décimal vaut donc $4 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 1 \times 1$.

En binaire, le *poids* du dernier chiffre d'un nombre est 1, l'avant dernier 2, ensuite 4, ensuite 8, etc. Le nombre 101010_2 en binaire vaut donc $1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$, soit 42 en décimal. Le 2 en indice indique qu'un nombre est représenté sous sa forme binaire. Les chiffres d'un nombre sous sa forme binaire sont souvent appelés *bit*s.

Plusieurs opérateurs se basent sur la représentation binaire d'un nombre. On en citera notemment trois qui peuvent être utilisés tout au long du sujet :

— L'opérateur *ET*, de symbole $\cdot$ ou &, où chaque bit du résultat vaut 1 uniquement si les deux bits de même poids des deux opérandes valent également 1. Par exemple, $21\&57 = 17$ car $10101_2\&111001_2 = 10001_2$. Dans ce sujet, nous préférerons utiliser le symbole & pour éviter toute confusion avec la multiplication.

— L'opérateur *OU*, de symbole $+$ ou $|$, où chaque bit du résultat vaut 1 si au moins l'un des deux bits de même poids des deux opérandes vaut 1. Par exemple, $21|57 = 61$ car $10101_2|111001_2 = 111101_2$. Dans ce sujet, nous préférerons utiliser le symbole $|$ pour éviter toute confusion avec l'addition.

— L'opérateur *OU Exclusif*, de symbole $\oplus$ ou $\widehat{}$, où chaque bit du résultat vaut 1 uniquement si précisément l'un des deux bits de même poids des deux opérandes vaut 1. Par exemple, $21 \oplus 57 = 44$ car $10101_2 \oplus 111001_2 = 101100_2$. Dans ce sujet, nous préférerons utiliser le symbole $\oplus$ pour éviter toute confusion avec l'exponentiation.