Prologin 2022

Concours national d'informatique

Épreuve écrite d'algorithmique

Prolygones

1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

Conseils

- Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
- **Soignez la présentation** de votre copie.
- N'hésitez pas à poser des questions.
- Si vous avez fini en avance, relisez bien, ou préparez votre présentation pour l'entretien.
- N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

- Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
- Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
- Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
- Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe, sinon ça va barder.
- Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
- Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

2 À propos du sujet

Ce sujet se concentre sur une partie plus géométrique de l'algorithmie. Vous aurez l'occasion de jouer, entre autres, avec des intersections de segments, des enveloppes convexes, des polygones et leurs triangulations, et pour finir un problème relativement connu qui mélange toutes ces notions.

Si vous ne connaissez pas les termes évoqués précédemment, pas d'inquiétude, ils sont expliqués avant d'être utilisés dans les différents exercices.

La difficulté n'est pas forcément que croissante, elle est distribuée à travers tout le sujet. N'hésitez donc pas à passer des questions pour revenir dessus plus tard. Le sujet est long et non-trivial, il n'est pas attendu une réponse à toutes les questions.

Sauf si explicitement demandé pour les questions nécessitants un algorithme, il n'est pas nécessaire d'écrire l'algorithme, une explication de son déroulé est suffisant.

Enfin, profitez-en pour découvrir, ou approfondir, les différentes notions rencontrées au fur et à mesure de l'avancée.

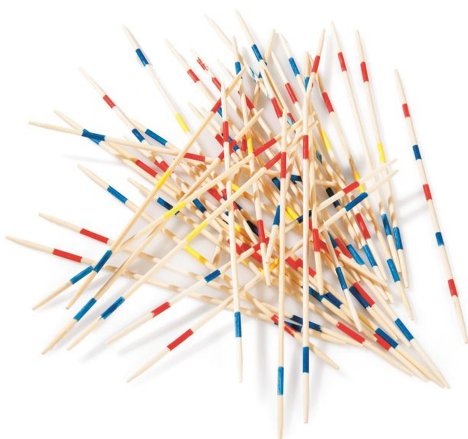
3 Emmêlage de Mikado

Cela fait bien longtemps que Joseph Marchand maitrise l'art délicat du lancer de Mikado. À chaque lancer, il en est certain, ses Mikados se mélangent, se chevauchent, s'entremêlent.

Il faut dire que c'est plutôt pratique pour rendre le jeu plus intéressant, aucun défi à jouer avec des Mikados éparpillés individuellement !

Joseph, fier de lui, annonce qu'à chaque lancer de n Mikado, il y aura au moins $\frac{2n}{3}$ intersections. Un jour toutefois, son ami Marc Jostant lui demande des preuves ! Loin de se démonter, Joseph lui propose donc d'assister à k lancers et vérifier que son affirmation reste toujours vraie.

Marc a d'autres choses à faire que de patienter aussi longtemps à côté de Joseph, il décide donc d'installer une caméra au-dessus du sol, qui prendra une photo du résultat de chaque lancer.



Après quelques jours, Marc décide de vérifier sur les photos l'affirmation de Joseph. Il remarque bien vite que compter à la main les intersections n'est pas très amusant. Débrouillard, il décide d'entrainer son réseau de neurones [1] pour détecter et récupérer les positions des Mikados, pour pouvoir ensuite développer un algorithme qui comptera les intersections pour lui.

Dans cette partie, on va s'intéresser à l'algorithme de détection des intersections. On considère que les segments étudiés **ne seront jamais colinéaires** [2].

1. Non pas son cerveau, mais des neurones artificiels
2. Deux segments sont colinéaires s'ils sont sur la même ligne.

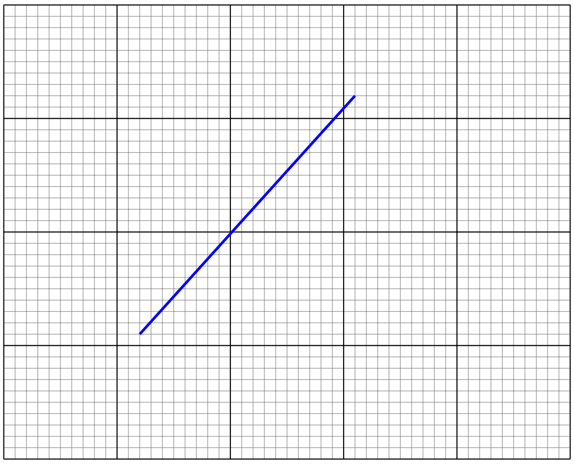
3.1 Placer les Mikados

Question 1 (1 point)

> Proposer une structure de données adaptée pour représenter les Mikados dans le programme ?

Question 2 (1 point)

> Marc possède une image avec seulement un Mikado. Son système lui permet une précision au dixième de centimètre. Avec la structure de données choisie précédemment, comment serait représenté ce Mikado spécifique ? On considère le coin inférieur gauche de la photo comme l'origine $(0, 0)$ du repère.



Question 3 (3 points)

> Considérons deux Mikados délimités respectivement par les points A, B et C, D. Dans quels cas ces deux Mikados se croisent-ils ?
>
> 1. $A = (1, 5)$, $B = (2, 7)$, $C = (2, 6)$, $D = (6, 0)$?
> 2. $A = (2, 6)$, $B = (6, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (6, 6)$?
> 3. $A = (1, 5)$, $B = (2, 7)$, $C = (1, 11)$, $D = (4, 1)$?
>
> $E = (x, y)$ représente le point E placé en abscisse x et ordonnée y.

Question 4 (1 point)

> Proposer une manière de vérifier si 2 segments non-colinéaires s'intersectent.
>
> *Pour les plus malins d'entre vous qui liraient la partie suivante avant de répondre à cette question, proposez au choix une façon alternative ou démontrez l'orientation de trois points.*

3.2 Combien d'intersections ?

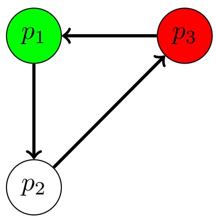
Marc décide de se plonger plus profondément encore dans les problématiques d'intersection de Mikados, comme chacun fait dans son temps libre. Voici ce qu'il trouve dans un livre :

Orientation de trois points

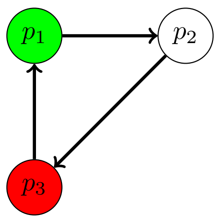
Les points p_1, p_2 et p_3 sont orientés en sens anti-horaire si :

$$(y_2 - y_1) \times (x_3 - x_2) - (y_3 - y_2) \times (x_2 - x_1) < 0$$

On considère qu'aucun trois points **ne seront colinéaires**. Par conséquent, s'ils ne sont pas orientés dans le sens anti-horaire, les points le sont dans le sens horaire. Par souci de temps ces résultats ne sont pas démontrés, et considérés comme acquis.



Sens Anti-Horaire



Sens Horaire

Intersection de deux segments

Deux segments (p_1, p_2) et (q_1, q_2) s'entrecoupent si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(p_1, q_1, p_2) et (p_1, q_1, q_2) ont des orientations différentes ;

(p_2, q_2, p_1) et (p_2, q_2, q_1) ont des orientations différentes.

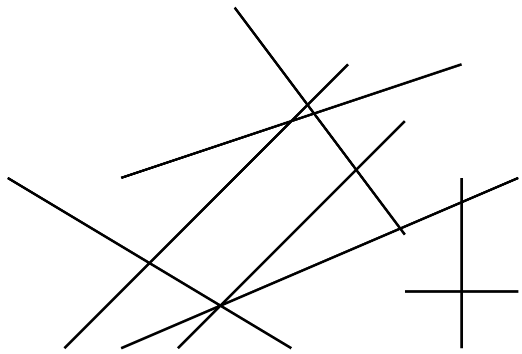
À nouveau, on **ignore** les cas spéciaux où les segments seraient colinéaires.

Question 5 (1 point)

D'après ce qu'a découvert Marc, proposer une fonction $doIntersect(s1, s2)$ qui vérifie si deux segments $s1$ et $s2$ se croisent.

Question 6 (1 point)

Combien de points d'intersection différents existent entre ces segments ?



Question 7 (2 points)

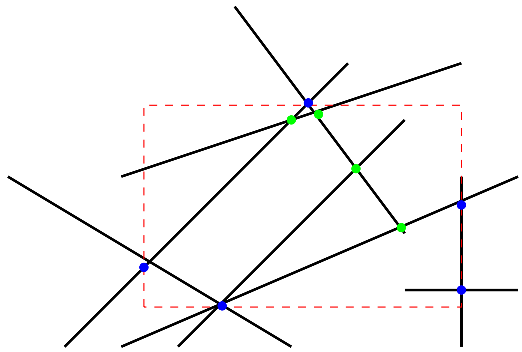
Proposer alors un algorithme permettant de dénombrer les intersections d'un ensemble de Mikados. La complexité recherchée est en $\mathcal{O}(nlog(n))$ avec n le nombre de Mikados, mais Marc acceptera n'importe quel algorithme dûment commenté.

3.3 In the box

Uniquement intéressé par les intersections dans ses photos, Marc aimerait gagner en espace de stockage en rognant les contours inutiles de ses photos.

Question 8 (1 point)

> **En utilisant les fonctions précédentes**, proposer un algorithme prenant en entrée un ensemble de segments et renvoyant les points du coin supérieur-gauche et inférieur-droit du rectangle englobant toutes les intersections de segments.



Question 9 (1 point)

> Quelle est la complexité d'un tel algorithme ?

Question 10 (3 points)

> Proposer une autre manière d'obtenir le rectangle voulu. L'originalité de la méthode ainsi que la complexité de l'algorithme sous-jacent seront pris en compte dans la notation.

Question 11 (1 point)

> Plutôt que de rogner des parties de photos pour réduire leur taille, citer une autre méthode permettant de réduire la taille d'un fichier sans perdre de données et donner le nom d'un algorithme mettant en application cette méthode.

Question 12 (2 points)

> Quelles différences peut-on faire entre une image au format **PNG** et une au format **JPG** ? Citer également un autre format d'image.

4 Envie de trianguler

Sarah Marchand [3] s'intéresse également à la géométrie, et le problème soulevé par Marc l'intrigue. Toutefois, elle préfèrerait s'attaquer à une forme différente du rectangle. Ne sachant se décider sur la forme exacte qui lui plaît le plus (il faut dire qu'entre les *octadécagone* [4], les *dodécagone* [5] ou encore les *hexacontagone* [6], le choix est vaste !), elle décide de ne pas s'arrêter sur une forme particulière, mais plutôt travailler avec tout type de polygone pour le moment.

4.1 The road to the chiliogone [7]

Sarah reprend le problème de son frère, mais décide cette fois de ne pas dessiner un rectangle qui englobe toutes les intersections mais plutôt un polygone simple. Elle choisi le polygone qui représente l'enveloppe convexe de l'ensemble des points représentant les intersections. Pour simplifier le polygone obtenu, Sarah décide de joindre les arêtes adjacentes colinéaires. Deux arêtes (A, B) et (B, C) placées sur la même ligne seraient donc simplifiées à une seule arête (A, C).

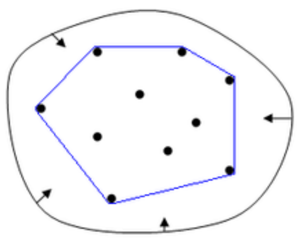
Avant de s'attaquer à ces polygones, Sarah s'attarde sur quelques définitions [8] :

Polygone simple

Un polygone est dit simple si deux côtés non consécutifs ne se rencontrent pas et deux côtés consécutifs n'ont en commun que l'un de leurs sommets. Autrement dit, si aucune arête n'en chevauche une autre.
Dans la suite du sujet, on désignera simplement par **polygone** les **polygones simples**.

Enveloppe convexe

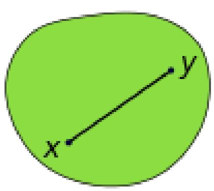
L'enveloppe convexe d'un ensemble de points est l'ensemble convexe le plus petit parmi ceux qui le contiennent. Dans un plan, l'enveloppe convexe peut être comparée à la région limitée par un élastique qui englobe tous les points qu'on relâche jusqu'à ce qu'il se contracte au maximum.

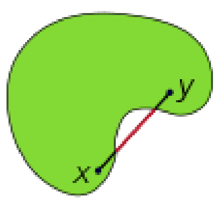


Ensemble convexe

Un ensemble C est dit convexe lorsque, pour tous x et y de C, le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans C, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in C \quad \forall t \in [0\,;1] \qquad t\,x + (1-t)\,y \in C$$





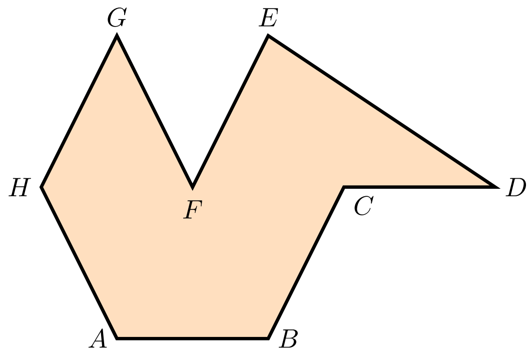
3. La sœur de Joseph.
4. Polygone à 18 arêtes
5. Polygone à 12 arêtes
6. Polygone à 60 arêtes
7. Polygone à 1000 arêtes
8. Source : Wikipedia

Question 13 (1 point)

Dans la liste suivante, quel est le nom du polygone obtenu depuis l'ensemble de Mikado de la question 8 ? Si le polygone n'est pas dans la liste, relire la partie **3.1**.
- Carré [9]
- Pentagone [10]
- Ennéagone [11]
- Octakaidecagone [12]
- Icosikaiheptagone [13]
- Triacontakaienneagone [14]
- Heptacontagone [15]
- Myriagone [16]

Question 14 (1 point)

Identifier les sous-polygones convexes de ce polygone. Un ensemble peut-être contenu dans un autre : GHF et $GHAF$ par exemple, qui sont tous les deux convexes.



Question 15 (2 points)

En utilisant les notions abordées jusqu'à présent, expliquer comment construire un algorithme vérifiant si un polygone P est convexe.

Question 16 (2 points)

Proposer en quelques lignes une méthode pour trouver l'enveloppe convexe d'un ensemble de points. Tout algorithme cité doit être expliqué.

Question 17 (3 points)

Indiquer une manière de calculer le périmètre et l'aire de l'enveloppe convexe.

4.2 Les prolygones

Après avoir autant travaillé avec des polygones et des triangles, Sarah se découvre une nouvelle passion (encore) et décide de mélanger les deux [17].

En réfléchissant un peu, notre férue de géométrie se dit que finalement, un polygone simple n'est qu'un ensemble de triangles.

> On parle de triangulation de polygone au sujet de la décomposition d'un polygone P en un ensemble de triangles qui ne se recouvrent pas, et dont l'union est P. Les sommets des triangles étant exclusivement des sommets de P.

9. Polygone à 4 arêtes
10. Polygone à 5 arêtes
11. Polygone à 9 arêtes
12. Polygone à 18 arêtes
13. Polygone à 27 arêtes
14. Polygone à 39 arêtes
15. Polygone à 70 arêtes
16. Polygone à 10000 arêtes
17. pour deux fois plus de fun.

Question 18 (2 points)

> Prouver que Sarah a raison et qu'il est en effet possible de trianguler n'importe quel polygone simple.

Question 19 (1 point)

> Existe-t-il une seule triangulation possible par polygone ? Donner un exemple.

Question 20 (2 points)

> Indiquer si la triangulation d'un polygone convexe est triviale, et expliquer pourquoi.

Question 21 (1 point)

> Soit un polygone P de n arêtes, en combien de triangles peut être triangulé P ?

4.3 Aller plus loin

Ces questions sont particulièrement plus chronophages et leur résolution n'est que légèrement introduite par les questions précédentes. N'hésitez pas à y revenir plus tard.

Question 22 (5 points)

> Prouver le résultat de la question précédente.

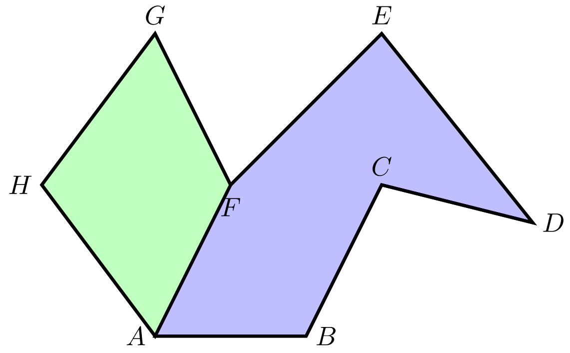
Question 23 (5 points)

> On considère une diagonale intérieure d'un polygone P de $n \geq 4$ sommets comme équilibrée si elle divise P en deux polygones d'au moins $\frac{n}{3} + 1$ sommets.
>
> Décrire un algorithme qui trouve une diagonale équilibrée d'un polygone. On admet qu'une telle diagonale existe toujours dans un polygone d'au moins 4 sommets.

5 À l'état de l'Art

*Bien qu'il ne soit pas nécessaire d'avoir complété la partie 4 pour s'attaquer à la **5**, il est fortement recommendé de s'y attarder, particulièrement à la sous-partie 4.2.*

Le problème de la galerie d'art est formulé en géométrie computationnelle comme le nombre minimum de gardes qui doivent être placés dans un polygone simple à n sommets de sorte que tous les points de l'intérieur soient visibles. La visibilité est définie de telle sorte que deux points u et v soient mutuellement visibles si le segment uv se trouve exclusivement à l'intérieur du polygone.



Dans l'exemple ci-dessus, il faut au moins deux gardes pour surveiller la galerie. On peut en placer un en G et un en C. Notons qu'avec cette configuration les deux gardes surveilleront les triangles HAF et ABF.

Voici les différents éléments que nous utiliserons :
— Un polygone P représentant la galerie d'art,
— Un ensemble de points S représentant les sommets avec un garde.

Question 24 (1 point)

> Combien de gardes suffisent à surveiller un polygone convexe ?

Question 25 (7 points)

> Proposer une méthode pour trouver une réponse au problème. La question est volontairement laissée floue.
>
> Des pistes de résolutions peuvent inclure des triangulations du polygone et des graphes colorés.

Question 26 (3 points)

> Dans l'ensemble du sujet les polygones ont été considérés simple. Reprendre la question 24 dans le cadre d'un polygone à trous.

> Un polygone P est dit *à trous* lorsqu'un ou plusieurs autres polygones réside entièrement à l'intérieur de P. La présence d'un trou réduit le champs de vision du garde ainsi qu'un point u est visible depuis un point v si uv est entièrement dans P **et** qu'il n'existe aucune intersection avec un trou du polygone.

Question 27 (2 points)

> Discuter des l'avantages ou inconvénients d'avoir des gardes mobile.

> Un garde est mobile lorsqu'il est autorisé à se déplacer le long d'un mur de la gallerie, c'est à dire d'une arête du polygone à la fois. La zone surveillée par un garde mobile est celle visible depuis un sommet d et $d-1$, où d est le sommet actuel du garde, et $d-1$ le sommet où était précédemment positionné le garde.

Question 28 (1 point)

Vous disposez d'un seul garde. Dessinez un polygone surveillable entièrement avec un garde mobile, mais pas un garde statique.

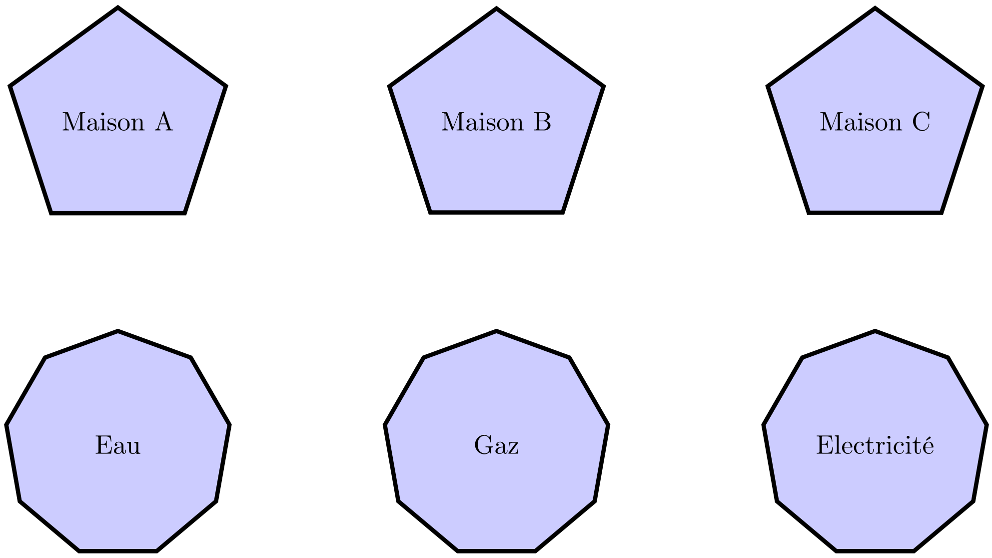
Question 29 (2 points)

Proposer une question pertinente sur un thème abordé dans ce sujet.

6 Bonus

Question bonus 30 (10 points)

> Résoudre l'énigme des trois maisons.
>
> *Un lotissement de trois maisons doit être équipé d'eau, de gaz et d'électricité. La règlementation interdit de croiser les canalisations/cablages pour des raisons de sécurité. Comment relier chaque maison à l'eau, au gaz et à l'électricité en respectant la réglementation ?*



Question bonus 31 (1 point)

> Proposer un nom pour un polygone de 184 arêtes [18].

Question bonus 32 (3 points)

> Dessiner un carton ouvert qui ne soit pas un hexahédre [21].

Question bonus 33 (1 point)

> Lister les pseudonymes des organisateurs présents.

Question bonus 34 (5 points)

> Corriger sa propre copie au stylo rouge [22] dans la marge.

Question bonus 35 (3 points)

> En quoi consiste la corruption de cache ARP ? [23]

Question bonus 36 (3 points)

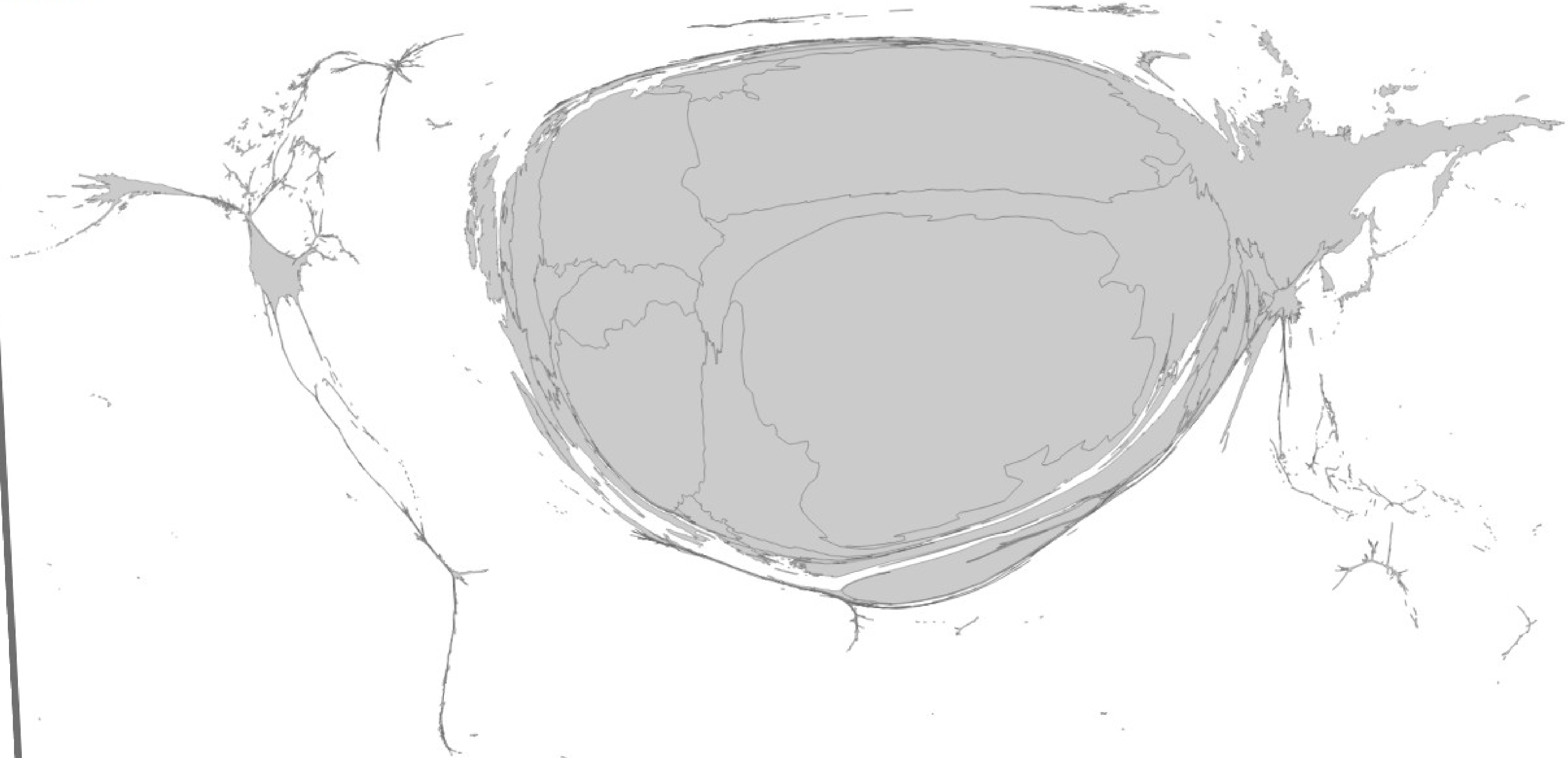
> Dessiner la carte des pôles et flux de la mondialisation (ou tout autre carte pertinente) sur l'annexe en page suivante. L'annexe est à détacher et rendre dans la copie.

18. La notation 184-gone n'a pas été approuvé par le CSP [19]
19. Conseil Scientifique de Prologin [20]
20. Créé spécialement en 1835 pour étudier le comportement des polygones en environnement hostile
21. Polyèdre à 6 faces
22. Si le stylo n'est pas rouge, il peut être vert, sinon les points de cette question sont divisés par deux.
23. "Tu veux dire le ARP cache poisoning ?" - Adrian

7 Annexe en page suivante

Terre

Prologin, 1321



Dessinée de tête