



Concours national d'informatique

Épreuve écrite d'algorithmique

CRÊPOLOGIE

1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

Conseils

- Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
- **Soignez la présentation** de votre copie.
- Les exercices ne sont pas en ordre croissant de difficulté ! Lisez **vraiment** bien tout le sujet.
- N'hésitez pas à poser des questions.
- Si vous avez fini en avance, relisez bien, ou préparez votre présentation pour l'entretien.
- N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

- Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
- Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
- Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
- Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe, sinon ça va barder.
- Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
- Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.
- Les questions bonus sont à traiter seulement une fois que le sujet entier a été essayé.

2 Concours pour crêpophile¹

Cette année, Joseph Marchand voit les choses en grand ! Il veut avoir la meilleure recette de crêpe possible pour la finale de cette année. Pour cela il a cherché, pendant des mois, tous les artisans crêpiers de la capitale et des alentours. Cependant il ne sait pas lequel de ces artisans détient **la** meilleure recette de crêpe. Joseph ne pouvant pas tester toutes ces recettes seul, il décide d'organiser un concours de crêpes durant la finale² pour déterminer **la** meilleure recette de crêpe. Afin de pouvoir faire une dégustation de **la** crêpe avant la remise des prix, notre grand amateur de crêpes veut que son concours se déroule **le plus rapidement possible**.

Durant ses longues recherches, Joseph a récupéré la liste de toutes les recettes qu'il veut tester durant le concours, ainsi que la liste des ingrédients nécessaires.

Toutefois, pour des raisons de budget, il n'y a qu'une source par ingrédient : si un artisan utilise un ingrédient pour réaliser une de ses recettes, cet ingrédient ne peut pas être utilisé par un autre artisan pendant toute la durée de celle-ci⁴. De plus M. Marchand veut qu'**exactement un exemplaire de chaque crêpe** soit préparé durant le concours.

Avant de pouvoir commencer ce prestigieux concours, Joseph n'arrive pas à déterminer deux aspects des plus importants :

- Quelle est la durée minimale du concours ?
- Quel est le nombre minimum d'artisans et de biligs⁵ nécessaires pour le bon déroulement du concours ?

3 Préparatif

On considère qu'un artisan produit une crêpe par minute. Les ingrédients nécessaires à la préparation de toutes les recettes sont numérotées de 0 à $I - 1$. Enfin pour chaque recette vous disposez d'une liste des ingrédients nécessaires à sa préparation.

Par exemple :

- La Complète : $\{0, 1, 2\}$
- La Bretonne : $\{3, 0, 4\}$
- La Provençale : $\{0, 5, 2\}$

Avec les ingrédients suivant :

- Emmental : 0
- Jambon : 1
- Œuf : 2
- Andouille de Guémené : 3
- Crème fraîche : 4
- Tomate : 5

Question 1

(2 points)

Écrivez une fonction qui, pour deux recettes de crêpes, renvoie vrai si les deux recettes ne partagent pas d'ingrédients en commun.

| On définit R comme la taille de la plus grande liste d'ingrédients.

Question 2

(1 point)

Donnez la complexité (en fonction de R) de votre algorithme pour la Question 1, c'est-à-dire le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme.

1. La crêpophilie étant très en vogue chez les Lyonnais
2. pour pouvoir s'aider d'un jury de candidats experts en crêpologie³
3. Du latin *crispus* ("frisé", "ondulé") et du grec *λόγος* (*lógos* "science", "discours")
4. M. Marchand a un budget assez restreint.
5. Un ou une bilig est une plaque épaisse circulaire en fonte d'une quarantaine de centimètres de diamètre, utilisée en cuisine bretonne pour faire cuire les galettes et les crêpes.

Question 3

(3 points)

On considère maintenant que les ingrédients de chaque recette sont triés par ordre croissant de leur numéro. Réécrivez une version plus efficace de l'algorithme de la Question 1.

Question 4

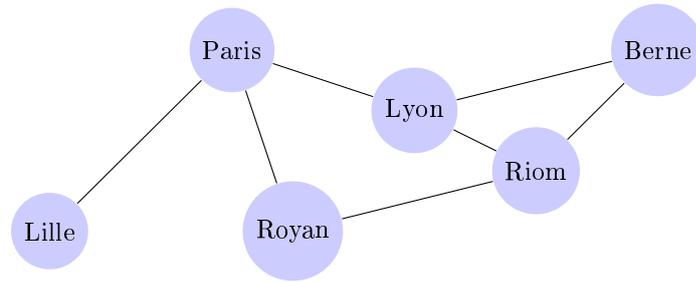
(1 point)

Donnez la complexité (en fonction de R) de votre algorithme pour la Question 3.

4 Un concours expéditif

Un graphe est une structure de données permettant de représenter des relations dans un ensemble d'éléments. Un graphe est composé de sommets, qui représentent les éléments et d'arêtes, qui représentent les relations entre les différents éléments.

Par exemple voici un graphe non orienté de quelques villes :



Dans cette partie on considère un graphe non orienté, où les sommets sont les recettes de crêpes. Les sommets de ce graphe sont reliés entre eux si et seulement s'ils ont au moins un ingrédient en commun.

Question 5

(1 point)

Dessinez le graphe correspondant à l'exemple donné plus haut (partie 3).

Question 6

(2 points)

Quelle structure de données peut-on utiliser pour représenter votre graphe (plusieurs réponses possible)?

Question 7

(4 points)

Écrivez une fonction qui, pour une liste de recettes de crêpe, renvoie le graphe correspondant à cette liste de recettes.

| On définit N comme le nombre de recettes.

Question 8

(1 point)

Donnez la complexité (en fonction de R et de N) de votre algorithme pour la Question 7.

| Un graphe est dit biparti s'il existe une partition en deux sous-ensembles telle que chaque arête aille d'un sous-ensemble à l'autre.

Question 9 (3 points)

Joseph veut maintenant savoir s'il est possible de réaliser le concours en 2 minutes⁶. Montrer que cela sera toujours possible si le graphe est biparti.

Question 10 (4 points)

Écrivez une fonction qui, pour un graphe donné, renvoie vrai si le concours est réalisable en 2 minutes.

| On définit V comme le nombre de sommets et E comme le nombre d'arêtes

Question 11 (1 point)

Donnez la complexité (en fonction de V et de E) de votre algorithme pour la Question 10.

5 Plan crêpier

Joseph Marchand veut maintenant tester si son planning pour le concours est valide. Un planning est un ordonnancement des recettes de crêpe où chacune se voit attribuer un créneau à la $i^{\text{ème}}$ minute. Un planning est dit valide si et seulement si pour chaque créneau, aucune des recettes de ce créneau ne partage d'ingrédient.

Question 12 (1 point)

Comment pouvez-vous représenter un planning dans votre graphe?

Question 13 (2 points)

Écrivez une fonction qui, pour un planning quelconque, renvoie vrai si le planning est valide.

Question 14 (4 points)

Écrivez une fonction qui, pour un graphe donné, renvoie la durée minimale du concours.

Question 15 (1 point)

Donnez la complexité (en fonction de V et de E) de votre algorithme pour la Question 14.

| Une clique⁷ est un sous-ensemble d'un graphe où tous les sommets sont connectés entre eux. La taille d'une clique correspond à son nombre de sommet.

Question 16 (5 points)

Écrivez une fonction qui, pour un graphe donné, renvoie la taille de la plus grande clique du graphe.

| On note $\chi(G)$ la durée minimale du concours du graphe G et $\omega(G)$ la taille de la plus grande clique du graphe G .
Un graphe G est dit parfait si pour tout sous-ensemble G' de G on a $\chi(G') = \omega(G')$

Question 17 (2 points)

Écrivez une fonction qui, pour un graphe donné, renvoie vrai si le graphe est parfait (en utilisant la fonction de la question précédente).

6. Il n'a pas que ça à faire, il n'a toujours pas trouvé un moyen efficace de trouver le nombre de manières différentes de réaliser une crêpe parfaite.

7. clique

Le complémentaire d'un graphe possède les mêmes sommets, mais aussi les arêtes qui ne sont pas présentes dans le graphe de base, et uniquement celles-ci.

Un cycle dans un graphe est un parcours en suivant les arêtes⁸ où l'on revient à son sommet de départ.

La longueur d'un cycle est le nombre de sommets parcourus en suivant ce cycle.

D'après le théorème fort des graphes parfaits, si un graphe ou son complémentaire ne contient pas de sous-ensemble G' qui soit un cycle de longueur supérieur à 4 et impair, alors le graphe est parfait.

Question 18

(4 points)

Écrivez une fonction qui, pour un graphe donné, renvoie vrai si le graphe est parfait (en utilisant le théorème fort des graphes parfaits).

Question 19

(1 point)

Réécrivez une fonction plus efficace qui, pour un graphe **parfait** donné, renvoie la durée minimale du concours.

Question 20

(1 point)

Écrivez une fonction qui, pour un graphe **parfait** donné, renvoie le nombre minimal d'artisans nécessaires pour réaliser le concours dans un temps minimum.

6 Bonus

Question bonus 1

(2 points)

À quelle classe de problèmes, la durée minimale du concours appartient-elle ?

Question bonus 2

(1 point)

Comment s'appelle le râteau en bois qui sert à étaler la pâte à crêpes ?

Question bonus 3

(42 points)

Écrivez une fonction qui, pour un graphe donné, renvoie la durée minimale du concours en temps polynomial.

Le sujet comporte 5 pages (sans compter la page de garde), 20 questions, et 3 questions bonus. Les questions normales sont notées sur 44 points, et les questions bonus rapportent au total 45 points, plus 1 point de présentation.

8. de poisson