Prologin 2017

Concours national d'informatique

Épreuve écrite d'algorithmique
Paris II

19 février 2017

L'heure du duel

1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

Conseils

— Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
— **Soignez la présentation** de votre copie.
— N'hésitez pas à poser des questions.
— Si vous avez fini en avance, relisez bien.
— N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

— Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
— Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
— Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
— Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe.
— Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
— Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

2 Sujet

Introduction

Aujourd'hui, une nouvelle fait la une des journaux de Battle City : une équipe d'archéologues travaillant en Égypte a fait une découverte sensationnelle ! Les bas-reliefs mis au jour laissent à penser que le pharaon et sa cour s'adonnaient régulièrement à un genre de jeu de cartes. Au QG de la Kaiba Corp, c'est l'affolement général : si ce jeu pouvait être remis au goût du jour, il pourrait générer d'énormes bénéfices.

Cependant, les restes retrouvés par les archéologues ne permettent pas de reconstituer les règles du jeu. Kaiba Corp lance alors un grand concours : les participants soumettent des règles, et les meilleures idées seront retenues pour le lancement du jeu.

Ayant une grande expérience de la scène compétitive des jeux de cartes, vous entendez bien participer, et gagner ! Vous imaginez les règles suivantes :

— le jeu n'est pas symétrique [1], il y a un attaquant et un défenseur ;
— c'est toujours l'attaquant qui commence ;
— au début de la partie, on fixe le nombre k de tours, puis on donne k jetons (numérotés de 1 à k) à chaque joueur
— ensuite, chacun aligne des cartes face visible devant lui ;
— une fois ces opérations effectuées, on ne touche plus aux cartes.

Une fois cette mise en place terminée, on obtient alors le plateau de jeu, chaque joueur possédant la moitié sur laquelle il a posé ses cartes. Une partie se déroule alors comme suit. À chaque tour i, l'attaquant place son jeton i sur une des cartes du plateau (une des siennes ou du défenseur, libre à lui). Le défenseur doit alors répondre en plaçant son i-ème jeton sur une des cartes en respectant différentes règles.

— Le défenseur joue toujours du côté opposé à l'attaquant : si l'attaquant a joué sur une de ses cartes, le défenseur doit aussi jouer sur une des siennes (et vice versa) ;
— les cartes sur lesquelles on a placé les jetons i sont identiques ;
— le défenseur doit copier la position relative des jetons : pour tous les jetons j déjà placés, si l'attaquant a placé son jeton (strictement) à gauche du jeton j, alors le défenseur doit faire pareil de l'autre côté du plateau (même chose pour à droite).
— Cas particulier de la règle précédente : si l'attaquant joue sur une carte sur laquelle se trouvait un jeton j, le défenseur doit jouer sur l'autre carte marquée d'un jeton j. De même, si l'attaquant n'a pas joué sur une carte marquée d'un jeton j, alors le défenseur ne le pourra pas non plus (à ce tour-ci).

Le défenseur gagne si à chacun des k tours, il a pu poser un jeton en respectant ces conditions. S'il en a été incapable, l'attaquant gagne.

Exemple

Comme vous n'avez pas encore décidé des noms des cartes [2], on les représentera par des lettres de a à z. Ainsi, chaque côté du plateau contient une suite de lettres [3]. On représentera donc un plateau par le couple de mots (cartes de l'attaquant, cartes du défenseur).

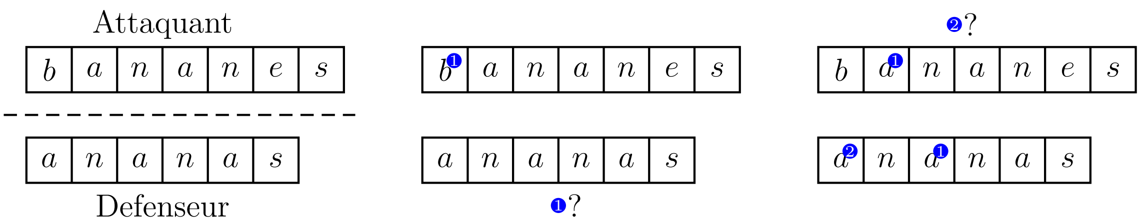
Supposons que le plateau soit constitué des cartes *banane* du côté de l'attaquant et *ananas* de l'autre. Voici deux stratégies possibles :

1. L'attaquant peut gagner en un tour en mettant son premier jeton sur la carte b. Le défenseur doit alors trouver une carte b dans le camp opposé, ce qui est impossible (pas

1. La symétrie c'est dépassé, et vous voulez innover !
2. Et pour les besoins de l'exemple
3. Autrement dit, un mot

de b sur *ananas*).

2. L'attaquant place son jeton sur le premier a de *banane*, le défenseur a le choix de placer le sien sur un des trois a de *ananas*, par exemple le deuxième. Au deuxième tour, si l'attaquant joue sur le premier a de *ananas*, le défenseur a perdu : il doit répondre sur un des a de *banane*. Cependant, il ne peut pas répondre sur le premier a (car sinon, les jetons 1 et 2 seraient à la même place dans *banane* mais pas dans *ananas*). Il ne peut pas non plus sur le deuxième a (sinon le jeton 1 est à droite de 2 dans *banane* mais à gauche dans *ananas*).



(a) Le plateau (b) Stratégie 1 (c) Stratégie 2

Partie I : Préliminaires

Pour finaliser vos règles, vous préparez quelques exemples pour une meilleure compréhension de votre futur auditoire.

Question 1 (1 point)

> Sur le plateau précédent, si l'attaquant joue sur le deuxième n de *bananes*, où peut jouer le défenseur ? Y a-t-il un choix meilleur que les autres ?

Question 2 (1 point)

> Combien de tours au maximum le défenseur peut-il survivre si le plateau est composé de *pataper* et *patatarte*[4] ?

Question 3 (2 points)

> Donner un exemple de plateau tel que le défenseur gagne (quoi que joue l'attaquant) si le nombre de tours est 2.

Vous en avez marre de vérifier qui a gagné à la main à toutes les parties. Question d'impartialité et de rapidité, vous décidez donc de programmer un arbitre qui décidera du vainqueur.

Question 4 (3 points)

> Écrire une fonction qui prend en entrée un plateau, un nombre de tours et les positions jouées et qui renvoie le gagnant de la partie. Vous expliciterez les structures que vous utiliserez pour représenter les arguments.

Après quelques parties, vous vous rendez compte de quelques propriétés intéressantes qui vous permettront d'affiner les règles encadrant le nombre de tours et les choix de plateau.

4. En supposant que l'attaquant joue de manière optimale.

Question 5 (4 points)

> Montrer que pour tout plateau dont les deux côtés diffèrent, il existe un nombre de tours minimal à partir duquel l'attaquant gagne forcément. [5]

Question 6 (4 points)

On dit que le défenseur a une stratégie gagnante en k tours s'il gagne au bout des k tours, quels que soient les coups de l'attaquant. Sinon, on dit que l'attaquant a une stratégie gagnante.

> Supposons que le défenseur a une stratégie gagnante en k tours sur les plateaux (u, v) et (v, w). Montrer qu'il a aussi une stratégie gagnante en k tours sur le plateau (u, w).

Question 7 (4 points)

> Supposons que le défenseur a une stratégie gagnante en k tours sur les plateaux (u_1, v_1) et (u_2, v_2). Montrer qu'il a aussi une stratégie gagnante en k tours sur le plateau (u_1u_2, v_1v_2) [6]

Partie II : Une seule carte

Pour l'instant, vous n'avez inventé qu'un seul type de cartes (qu'on note a). Vous vous demandez alors ce qu'il advient des stratégies gagnantes dans ce cas.

Question 8 (4 points)

> Montrer que pour tout entier k, si le plateau est constitué de deux mots u et v de la forme a^i et a^j (a^i représente $\underbrace{a \dots a}_{i \text{ fois}}$), avec $i \neq j$ et $0 \leqslant i < 2^{k-1}$, alors l'attaquant a une stratégie gagnante en k tours.

Question 9 (7 points)

Dans cette question, on fixe un entier k et un plateau constitué de deux mots de taille au moins 2^k.

> 1. Montrer qu'à chaque tour i, le défenseur peut jouer de manière à préserver la propriété suivante :
>   - si la distance entre le jeton i_1 et le jeton j_2 (ou le bord du mot) est supérieure à 2^{k-i} alors il en est de même de l'autre côté du plateau ;
>   - dans le cas contraire, la distance entre les deux jetons (ou le bord) est la même dans les deux mots.
> 2. En déduire que le défenseur a une stratégie gagnante en k tours.

5. Un peu triste pour votre jeu, il va falloir affiner le choix du nombre de tours !
6. u_1u_2 signifie qu'on a collé la suite de cartes u_2 à la fin de la suite de cartes u_1.

Partie III : Version simplifiée

Force est de constater qu'il vaut mieux avoir différentes cartes pour rendre le jeu intéressant. Après avoir inventé différents types de cartes, c'est maintenant l'heure du duel ! Vous prenez la première personne qui vous passe sous la main [7] et vous le défiez à votre nouveau fantastique révolutionnaire jeu venu des temps anciens [8].

Cependant, chaque joueur a énormément de possibilités, et vous et vos adversaires mettez beaucoup trop de temps à jouer, ce qui finit par vous ennuyer à la longue. Vous décidez donc de restreindre le champ d'action de l'attaquant. Dans cette partie, on considère que chacun ne peut jouer que dans son camp.

Concevoir un jeu, c'est bien, mais gagner, c'est mieux ! Vous cherchez donc à optimiser vos cartes pour essayer d'obtenir des stratégies gagnantes.

Une condition nécessaire...

Question 10 (4 points)

On dit que s est un sous-mot de t si, en effaçant des lettres de t, on peut obtenir s.

> Montrer que si le défenseur a une stratégie gagnante en k tours sur le plateau (u, v) [9], alors pour tout sous-mot w de u de taille au plus k, w est un sous-mot de v.

Question 11 (5 points)

> Écrire une fonction qui prend en entrée deux mots u et v ainsi qu'un entier k et qui teste si la condition de la question précédente est vérifiée.

Question 12 (3 points)

Quelle bonne idée ! Vous décidez donc (quand vous êtes défenseur) de toujours faire en sorte que la condition précédente soit respectée. Seul problème, il n'a suffi que de deux tours à votre mémé pour vous battre encore à plates coutures, alors que vous n'aviez que 3 cartes chacun !

> Donner un exemple de plateau remplissant les critères ci-dessus. C'est-à-dire un plateau composé de deux mots (u, v) de trois cartes, tel que tout sous mot de taille au plus 2 de u est un sous-mot de v, et tel que l'attaquant ait une stratégie gagnante en deux tours sur ce plateau.

...mais pas suffisante !

Vous cherchez donc à affiner votre critère pour trouver une stratégie gagnante. Vous faites alors appel à Yugi, expert en jeux de tous genre.

Yugi vous assure qu'il est possible de trouver une stratégie gagnante en utilisant des formules [10].

7. Votre grand-mère, votre petit frère, un passant si vous étiez dehors, soyez imaginatifs !
8. Marketing oblige !
9. Rappel : u est le mot représentant les cartes de l'attaquant
10. Et non pas l'âme des cartes, comme tout le monde croit

Soit w un mot du plateau et i, j des positions de ce mot (par exemple où on a posé un jeton). On dit que :

— w vérifie $a(i)$ si la carte de w à la position i est un a ;
— w vérifie $i < j$ si la position i est à gauche de la position j ;
— w vérifie $i = j$ si les positions i et j sont identiques ;
— w vérifie $\mathcal{F}\&\mathcal{G}$ si w vérifie $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$;
— w vérifie $\neg\mathcal{F}$ si w ne vérifie pas $\mathcal{F}$;
— w vérifie $\exists i, \mathcal{F}(i)$ s'il est possible de trouver une position i dans w de sorte que w vérifie $\mathcal{F}(i)$.

Ces indications vous semblant peu claires, vous demandez quelques exemples à Yugi. Voici sa réponse :

1. n'importe quel mot contenant la carte a vérifie $\exists i, a(i)$. En effet, on peut toujours placer trouver une carte de type a ;
2. le mot $aaaa$ ne vérifie pas $\exists i, \neg a(i)$ car on ne peut pas trouver de carte qui n'est pas de type a ;
3. le mot $abbaabc$ vérifie $\exists i \exists j, a(x)\&b(j)\&i < j$, car on peut placer trouver deux positions i et j tels que i soit une carte a, j une carte b et i soit à gauche de j.

Question 13 (3 points)

> Quel est l'ensemble des mots vérifiant la formule $\exists i, a(i)\&\neg(\exists j, j > i)$?

Question 14 (3 points)

> Écrire une formule vérifiée par tous les mots contenant une carte a immédiatement suivie d'une carte b (et seulement par ceux-ci).

Question 15 (3 points)

> Soit u un mot constitué des cartes $u_1, \ldots, u_n$. Écrire une formule qui est vérifiée par tous les mots ayant u comme sous-mot (et seulement par ceux-ci).

Question 16 (8 points)

On dit qu'une position i est liée dans la formule $\mathcal{F}$ si elle est précédée d'un $\exists i$. Par exemple, i est liée dans la formule de la question 13 mais pas dans $\exists j, j < i$. Une formule est dite close si toutes les positions qui y interviennent sont liées.

> 1. Proposer une structure de données pour représenter les formules.
> 2. Écrire une fonction qui prend en entrée une formule $\mathcal{F}$ et une position i et qui renvoie vrai si i est liée dans $\mathcal{F}$.
> 3. Écrire une fonction qui teste si une formule $\mathcal{F}$ est close.

Question 17 (10 points)

Yugi vous met en garde ! Toutes les formules ne sont pas adaptées pour trouver votre stratégie gagnante. Une formule sera *adaptée* si elle ne contient pas $\neg(\ldots\exists\ldots)$. Par exemple, la formule de la question 13 n'est pas adaptée, mais celles des exemples de Yugi le sont.

> Montrer que le défenseur a une stratégie gagnante en k tours sur le plateau (u, v) si et seulement si quelle que soit la formule $\mathcal{F}$
> - close ;
> - adaptée ;
> - utilisant au plus k fois $\exists$;
> - et vérifiée par u ;
>
> $\mathcal{F}$ est vérifiée par v.
>
> *Indication : On pourra montrer que poser un jeton sur un mot correspond à définir une formule en ajoutant un $\exists$, sans $\neg$ qui le précède.*

Partie IV : Retour au cas général

Comme vous voulez aussi gagner quand vous jouez avec les règles initiales, vous cherchez maintenant à généraliser les résultats de la partie II aux règles complètes. Par crainte que Yugi ne vous vole vos idées, vous essayez seul d'adapter sa méthode dans ce cas.

Question 18 (10 points)

> Montrer que le défenseur a une stratégie gagnante en k tours sur le plateau (u, v) si et seulement si quelle que soit la formule close $\mathcal{F}$ utilisant au plus k fois $\exists$, $\mathcal{F}$ est vérifiée par u si et seulement si $\mathcal{F}$ est vérifiée par v.
>
> *Indication : on pourra reprendre la méthode utilisée en question 17. Autrement dit, on pourra construire pas à pas une formule à chaque tour, en ajoutant $\exists$ ou $\neg\exists$ selon le côté du plateau où joue l'attaquant.*

Vous ne pouvez attaquer la partie suivante que si vous avez réuni les 5 parties d'Exodia le maudit dans votre deck.

Partie bonus

Question bonus 19 (2 points)

> Quel est le nom du pharaon ?

Question bonus 20 (4 points)

> Listez les 7 objets du millénium, puis justifiez en 500 mots minimum lequel est selon vous le meilleur.

Question bonus 21 (2 points)

> Pour devenir un vrai duelliste, vaut-il mieux croire en :
> - l'âme des cartes ;
> - le pouvoir de l'amitié ;
> - la magie du millénium ?
>
> Vous justifierez en 500 mots ($\pm 10\%$).

Question bonus 22 (5 points)

> Montrez qu'il n'y a pas de formule vérifiée uniquement par les mots de longueur paire.

Question bonus 23 (20 points)

> Les jetons, c'est encombrant ! Développez une variante du jeu décrit dans ce sujet qui n'utilise qu'un seul jeton par joueur. Donnez un critère pour que le défenseur ait une stratégie gagnante en k tours.

Le sujet comporte 7 pages (sans compter la page de garde) et 23 questions, parmi lesquelles 5 questions bonus. Les questions normales sont notées sur 79 points, et les questions bonus rapportent au total 33 points, plus 1 point de présentation.