



Concours national d'informatique
Épreuve écrite d'algorithmique
Lille, Nantes

11 février 2017

ATTRAPEZ LES TOUS !



1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

Conseils

- Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
- **Soignez la présentation** de votre copie.
- N'hésitez pas à poser des questions.
- Si vous avez fini en avance, relisez bien.
- N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

- Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
- Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
- Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
- Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe.
- Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
- Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

2 Sujet

Bien le bonjour !

Bienvenue dans le monde magique des Pokémon !

Mon nom est Chen !

Les gens souvent m'appellent le PROF Pokémon !

Ce monde est peuplé de créatures du nom de Pokémon !

Pour certains, les Pokémon sont des animaux domestiques,

pour d'autres, ils sont un moyen de combattre.

Pour ma part...

Je suis ingénieur pour l'optimisation des déplacements de dresseurs dans les centres commerciaux de Bourg Palette.

Question 1

(0 point)

┃ Tout d'abord, quel est ton nom ?

Partie 1 : Le Pokécentre commercial

Le mouvement du dresseur de base est très simple à prévoir : lorsqu'un Pokémon rare apparaît, le dresseur va toujours essayer de rejoindre ce Pokémon le plus rapidement possible pour tenter de le capturer.

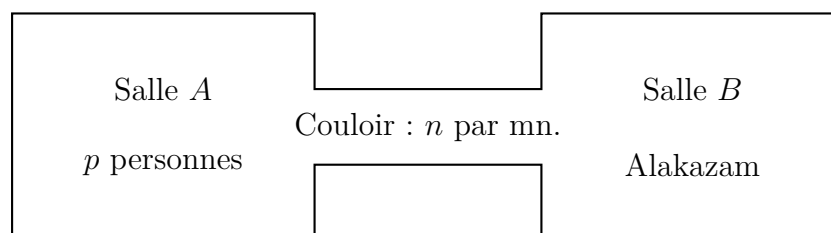
Mon travail est donc extrêmement intéressant et est bien sûr vital à la société. Prenons un exemple simple¹ :

Le centre commercial de Bourg Palette est représenté par deux salles, A et B , reliées entre elles par un couloir. On suppose qu'un Alakazam² apparaît dans la deuxième salle. Pour éviter la cohue, un gardien placé en salle A laisse passer n personnes toutes les minutes. On note de plus t le temps de traversée du couloir.

Question 2

(1 point)

┃ Sachant qu'il y a p Bourg Palettiens de la salle A , combien de temps leur faudra-t-il pour qu'ils arrivent tous dans la salle B ?



En réalité, des études scientifiques très poussées ont montré que les Pokémon disparaissent après un certain temps T .

1. Si vous n'avez pas l'impression que c'est simple, ce n'est pas bien grave.

2. C'est un truc qui utilise des cuillères pour augmenter sa puissance mentale et est obligé d'utiliser la psychokinésie³ pour maintenir sa tête droite.

3. Apparemment ce mot existe.

Question 3

(1 point)

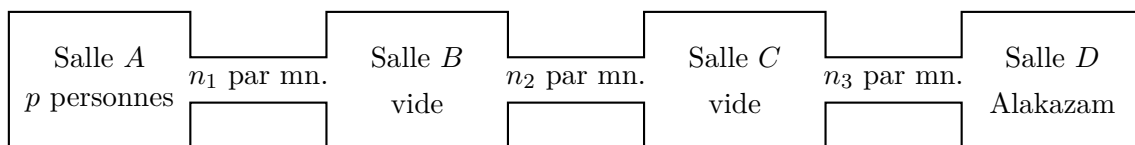
Écris une fonction qui permet de déterminer si tous les Bourg Palets de la salle peuvent attraper le Pokémon (elle doit renvoyer `true` si c'est possible et `false` sinon).

Le centre commercial de Bourg Palette est en réalité bien plus compliqué que ça. Il possède un nombre k de couloirs, chacun surveillé par un gardien, tous laissant passer un nombre de Bourg Paletgeois différent n_1, \dots, n_k par minute.

Question 4

(2 points)

Écris la fonction qui permet de déterminer le temps total nécessaire aux Bourg Palet-tants pour arriver jusqu'à l'Alakazam.



En réalité, la modélisation précédente est bien trop naïve. Les Bourgeois de Palet ne peuvent pas sprinter aussi longtemps. Ainsi, ils mettent une minute de plus pour chaque couloir qu'ils traversent (Ils mettent t minutes pour le premier, $t + 1$ minutes pour le deuxième...).

Question 5

(2 points)

Écris la fonction qui permet de déterminer le temps total nécessaire aux Bourg Palet-tards pour arriver jusqu'à l'Alakazam.

Partie 2 : Le voyage d'un habitant de Bourg Palette

Un autre aspect de mon travail est de guider les dresseurs dans la belle ville de Bourg Palette.

Cette ville se compose de rues et de carrefours⁴. On suppose que toutes les rues sont de la même longueur et se traversent en 10 minutes. Le professeur vous donne un plan de la ville, mais ce n'est pas très pratique : vous avez donc, pour chaque carrefour, noté tous les autres carrefours que vous pouvez rejoindre depuis celui-ci en prenant une seule rue (autrement dit, les carrefours qui lui sont directement reliés). Un dresseur se trouve dans la ville au moment où un Ronflex⁶ apparaît.

Question 6

(4 points)

Écris un programme donnant le temps nécessaire aux Bourg-Pallois pour arriver jusqu'au Ronflex, sachant leurs positions et en disposant d'une carte complète de la magnifique ville de Bourg-Palette. Par exemple, sur la Figure 1, si le dresseur se trouve au point H , et que le Pokémon se trouve au point B , il faudra 20 minutes au dresseur pour rattraper le Pokémon (en passant par C , il emprunte deux rues, il met donc 2×10 minutes).

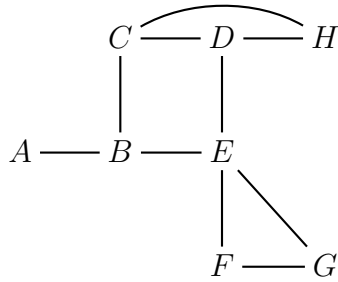


FIGURE 1 – Plan de Bourg Palette

Les Bourquais de Palette ne veulent pas seulement connaître le temps nécessaire pour arriver jusqu’au Pokémon, ils aimeraient aussi connaître le chemin optimal pour y arriver.

Question 7 (3 points)

Modifie le programme précédent pour renvoyer le chemin le plus court du dresseur au Pokémon.

Les dernières avancées technologiques⁸ ont permis de construire des Pokéstops dans la ville. Ces édifices peuvent, lorsqu’un Bourg Palettisant s’en approche, lui donner gratuitement des pokéballs et des potions.

Question 8 (3 points)

En modifiant ton code de l’exercice précédent, écris un programme qui renvoie le chemin le plus court que peut suivre le dresseur, en choisissant le chemin qui comporte le plus de Pokéstops en cas d’égalité.

Il arrive parfois qu’une maman Pokémon perde son ou ses bébés. En tant que dresseurs investis, les Bourg Paliens souhaitent alors réunir la mère et ses enfants (en les capturant, bien évidemment).

Question 9 (3 points)

Explique comment modifier le programme pour en tenir compte et retrouver le chemin le plus court si 2 Pokémon apparaissent simultanément. Que se passe-t-il s’il y en a 3 ? Et s’il y en a plus ?

Fatigués de parcourir tant de kilomètres, les bourg-parleurs ont décidé d’attirer les Pokémon grâce à de la nourriture. On suppose désormais qu’un Pokémon se dirige toujours vers la nourriture la plus proche en suivant le chemin le plus court. Tous les Pokémon se déplacent bien sûr à la même vitesse.

4. Comme toutes les villes en fait⁵.

5. Sauf la ville de Rochefourchat.

6. Comme son nom l’indique Ronflex est un Pokémon ron(d) et ronfle.⁷

7. Rien ne prouve en revanche qu’il soit flex.

8. Un appareil révolutionnaire qui fait coller les passants à leur téléphone et qui les transforme en coureurs effrénés

Question 10

(3 points)

En supposant connue la position de tous les Pokémons sur la carte, écris un algorithme qui calcule le meilleur carrefour où parachuter la nourriture⁹ pour récupérer tous les Pokémons en un minimum de temps.

Question 11

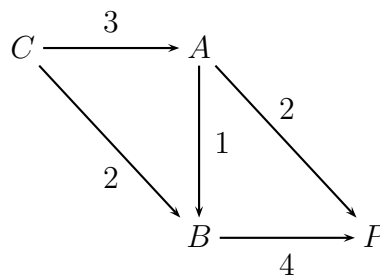
(5 points)

Nous disposons maintenant de deux caisses de nourriture. Écris un algorithme qui détermine où parachuter ces deux caisses pour récupérer tous les Pokémons le plus rapidement possible.

Partie 3 : Les flux de Pokédresseurs

Le nombre croissant de Bourgeois Palestiniens m'a fait développer un nouveau concept. Au lieu de m'intéresser à une seule personne dans son parcours, je m'intéresse au débit de personnes. En effet, Bourg Palette a attiré de nombreux touristes, et ce sont des mouvements continus de personnes qui se déplacent dans la rue. Ces personnes se déplacent du centre commercial (noté C) et se dirigent vers le pokémon (noté P).

On peut ainsi comparer le mouvement de la foule à une rivière qui coule : il s'agit d'un flux de personnes qui circulent de C vers P . À chaque route correspond ainsi une capacité : il s'agit de la quantité maximale de personnes que la route peut laisser passer en une seconde.

**Question 12**

(2 points)

Si tout le monde part du centre et se dirige vers le pokémon sur le schéma ci-dessus, quel est au maximum le nombre de personnes qui peuvent sortir du centre en une seconde (ce nombre est appelé flot maximum) ? Tracer dans ce cas la répartition des flux de personnes sur les routes.

Question 13

(3 points)

Montrer que pour chaque carrefour autre que celui du centre et celui où se trouve le pokémon, le nombre de dresseurs qui en sortent est égal au nombre de dresseurs qui y rentrent en une seconde. En déduire que le nombre de personnes qui sortent du centre en une seconde est égal au nombre de personnes qui rentrent dans le pokémon en une seconde.

Une coupe est la division du village en (au moins) deux parties indépendantes, le centre commercial et le pokémon se trouvant dans deux parties différentes. La capacité de la coupe est la somme des capacités des routes que nous avons supprimées (voir Figure 2).

9. On considère que même un magicien sait éviter une caisse de nourriture parachutée sur lui.

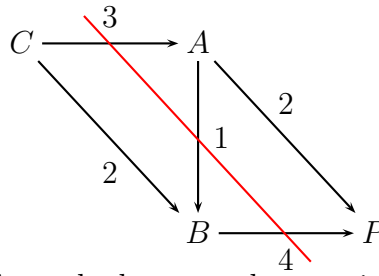


FIGURE 2 – Exemple de coupe de capacité $3 + 4 + 1 = 8$

Question 14

(2 points)

Quelle est la coupe minimale (*i.e.* celle dont la somme des capacités des routes supprimées est minimale) ? Remarques-tu une surprenante propriété qui est sûrement toujours vraie¹⁰ ?

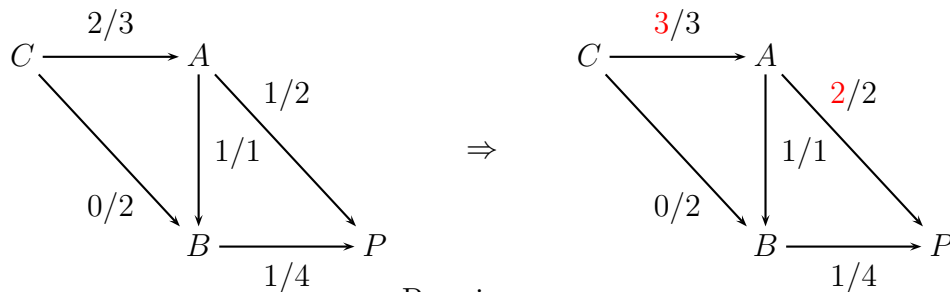
Question 15

(4 points)

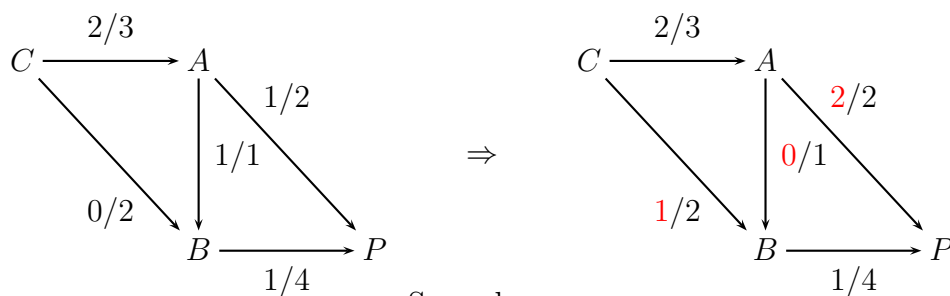
Montrer la propriété précédente.

Mon très bon ami Ford Fulkerson, habitant Bourg Geon, m’a parlé d’un algorithme donnant le flot maximal à coup sûr. Je lui ai demandé de me le communiquer mais il n’a accepté de ne me donner que quelques indications¹¹. Ces indications sont : l’algorithme se contente à chaque étape d’ajouter du débit à une ou plusieurs routes et d’enlever si besoin du débit sur d’autres. Il m’assure qu’à chaque étape, le débit total augmente.

Il m’a aussi laissé ces croquis :



Premier cas



Second cas

10. Puisqu’elle l’est dans un cas simple.

11. Ce n’est pas un si bon ami finalement.

Question 16

(6 points)

Retrouve l'algorithme de mon ami à partir de ces critères. Écris le programme correspondant, qui prend en entrée une carte de la ville et renvoie le flot maximal.

Question 17

(3 points)

Dans le pire des cas, combien de temps dure l'algorithme précédent ? (On suppose que la ville a n carrefours et m routes)

Appliquons mon modèle au problème initial dans sa version étendue. On fait l'hypothèse qu'il faut une seconde pour traverser une route (traverser un carrefour est instantané). On suppose de plus que tous les Burgers de Palette sont dans le centre commercial au départ et qu'un Goinfrex apparaît dans la ville. Le problème est de décider si tout le monde peut capturer ce charmant Pokémon en t secondes ou moins.

Question 18

(10 points)

Modélise ce problème en construisant une (grosse) ville bien choisie et déduis-en un algorithme pour trouver si le Goinfrex sera capturé en t secondes par l'ensemble des dresseurs. *Indication : une possibilité pour le nombre de carrefours de la nouvelle ville est $(t + 1)n$ si celle de départ en a n .*

Partie 4 : Bonus**Question bonus 19**

(5 points)

Implémente l'algorithme précédent¹².

Question bonus 20

(5 points)

Quel est le meilleur starter ? Justifie en au moins 500 mots.¹³

Question bonus 21

(1 point)

Donne le numéro dans le Pokédex de Goinfrex¹⁴.

Question bonus 22

(1 point)

Comment appelle-t-on les habitants de Bourg Palette ?¹⁵

12. Dans un langage pas trop verbeux, sois gentil avec les correcteurs !

13. Il n'y a bien évidemment qu'une seule bonne réponse.

14. Il y a bien évidemment plusieurs réponses possibles.

15. Comme nous sommes généreux, nous n'avons pas mentionné le Jeu. Vous n'avez donc pas perdu. De rien.

Question bonus 23

(5 points)

Un candidat¹⁶ a répondu $\frac{tp}{n}$ à la première question. Détermine en quelle unité s'exprime n et donnez un sens physique à n en 500 mots.

Question bonus 24

(5 points)

Propose un algorithme pour le problème de la question 11 si on a k caisses à parachuter. Comment évolue le nombre d'opérations effectuées en fonction du nombre n de carrefours, m de rues et de k ?

Le sujet comporte 7 pages (sans compter la page de garde) et 24 questions, parmi lesquelles 4 questions bonus. Les questions normales sont notées sur 57 points, et les questions bonus rapportent au total 22 points, plus 1 point de présentation.

16. Ou presque.