Utilisations de la Géométrie en Algorithmique

Sarah Fachada

École Polytechnique et Association Prologin

Samedi 9 mai 2015

Introduction

Le déterminant

Le déterminant, c'est quoi ?

Le déterminant

Le déterminant, c'est quoi ?

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

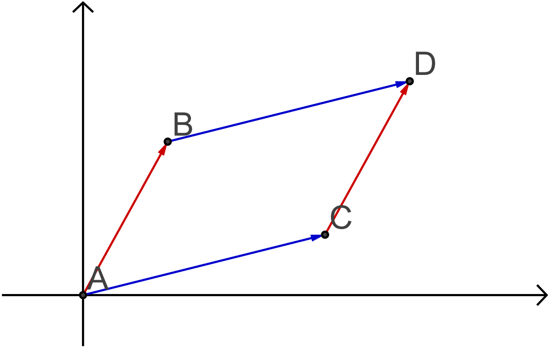
Le déterminant

Le déterminant, c'est quoi ?

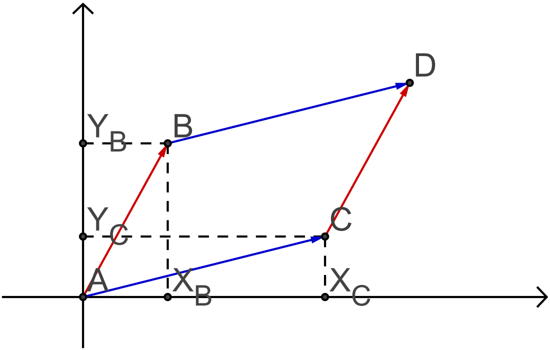
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

C'est l'aire d'un parallélogramme !

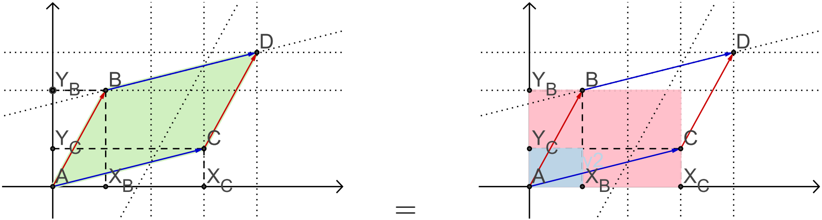
L'aire d'un parallélogramme



L'aire d'un parallélogramme



L'aire d'un parallélogramme



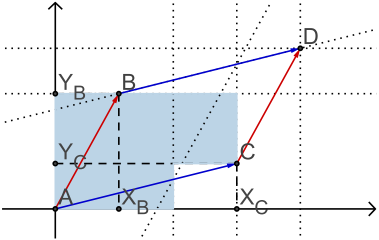
$$A = \det \begin{pmatrix} X_B & X_C \\ Y_B & Y_C \end{pmatrix}$$

L'aire d'un parallélogramme

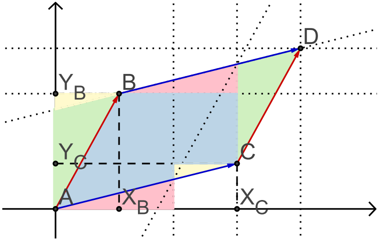
Preuve :

L'aire d'un parallélogramme

Preuve : Par découpage

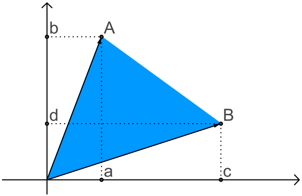


=



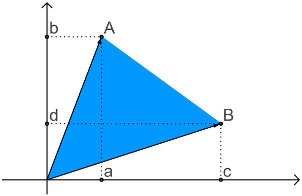
L'aire d'un triangle

Un triangle, c'est une moitié de parallélogramme, donc défini par deux vecteurs : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$



L'aire d'un triangle

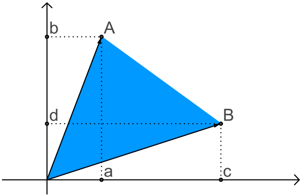
Un triangle, c'est une moitié de parallélogramme, donc défini par deux vecteurs : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$



Donc l'aire d'un triangle est $\frac{1}{2}(ad - bc)$

L'aire d'un triangle

Un triangle, c'est une moitié de parallélogramme, donc défini par deux vecteurs : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$



Donc l'aire d'un triangle est $\frac{1}{2}(ad - bc)$
Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, l'aire est un demi entier.

Orientation

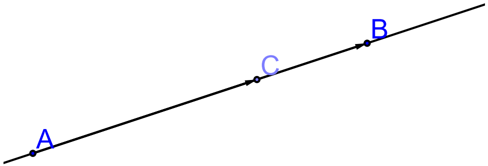
Le signe du déterminant dépend de l'orientation du triangle.
En effet $ad - bc = -(cb - da)$.

Orientation

Le signe du déterminant dépend de l'orientation du triangle.
En effet $ad - bc = -(cb - da)$.
Si l'on tourne dans le sens trigonométrique, on a un déterminant positif, sinon négatif.

Equations de droites

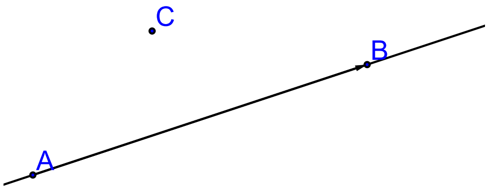
Si un point est sur une droite



L'aire du parallélogramme défini par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est nulle

Equations de droites

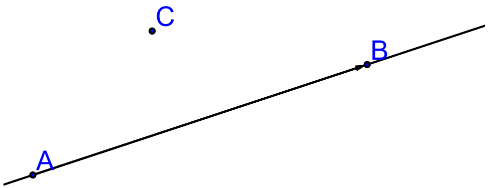
Si le point est orienté à gauche de la droite



L'aire du parallélogramme défini par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est strictement positive.

Equations de droites

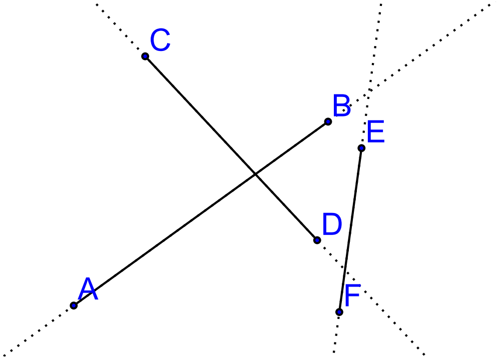
Si le point est orienté à gauche de la droite



L'aire du parallélogramme défini par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est strictement positive.
Sinon elle est strictement négative.

Intersection de segments

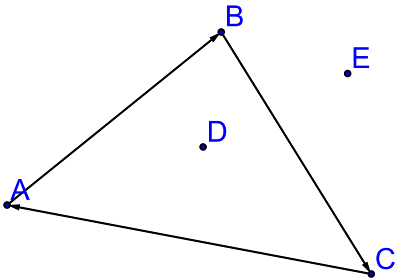
Deux segments se croisent



ssi A et B sont l'un gauche à et l'autre à droite de (CD)
et C et D sont l'un à gauche et l'autre à droite de (AB)

Un point dans un triangle ?

Un point est dans un triangle s'il est du même côté de chaque bord.



Comment avons-nous utilisé tout ça ?

Algorithme rapide pour déterminer si un point est dans un triangle.
Coordonnées barycentriques : P barycentre de $(A, s), (B, t), C(1 - s - t)$.

$$P \in ABC \Leftrightarrow s > 0, t > 0, 1 - s - t > 0$$

Comment avons-nous utilisé tout ça ?

Algorithme rapide pour déterminer si un point est dans un triangle.
Coordonnées barycentriques : P barycentre de $(A, s), (B, t), C(1 - s - t)$.

$$P \in ABC \Leftrightarrow s > 0, t > 0, 1 - s - t > 0$$

Il faut résoudre un système d'équations :

$$\begin{cases} x_P = sx_A + tx_B + (1 - s - t)x_C \\ y_P = sy_A + ty_B + (1 - s - t)y_C \end{cases} \tag{1}$$

soit

$$\begin{cases} x_P - x_C = s(x_A - x_C) + t(x_B - x_C) \\ y_P - y_C = s(y_A - y_C) + t(y_B - y_C) \end{cases} \tag{2}$$

Comment avons-nous utilisé tout ça ?

Ce qui donne après résolution :

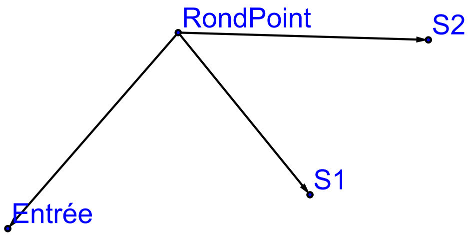
```cpp
bool point_in_triangle(const position& a, const position& b, const position& c,
                       const position& p)
{
    int area_twice = determinant(a, b, a, c);
    int sign = area_twice < 0 ? -1 : 1;
    int s = (a.y * c.x - a.x * c.y + (c.y - a.y) * p.x + (a.x - c.x) * p.y) * sign;
    int t = (a.x * b.y - a.y * b.x + (a.y - b.y) * p.x + (b.x - a.x) * p.y) * sign;

    return s > 0 && t > 0 && (s + t) < area_twice * sign;
}
```

Autre utilisation

Exercice 3 "Rond-Point" du QCM

Autre utilisation

Exercice 3 "Rond-Point" du QCM
Trouver la sortie la plus à droite est aussi un problème de déterminant



Conclusion

Le déterminant permet

Conclusion

Le déterminant permet

- De calculer des aires de parallélogramme

Conclusion

Le déterminant permet

- De calculer des aires de parallélogramme
- De situer des points par rapport à des droites, des figures

Conclusion

Le déterminant permet

- De calculer des aires de parallélogramme
- De situer des points par rapport à des droites, des figures
- De résoudre des systèmes d'équations

Conclusion

Le déterminant permet

- De calculer des aires de parallélogramme
- De situer des points par rapport à des droites, des figures
- De résoudre des systèmes d'équations

Il existe des déterminants pour les plus grandes dimensions.