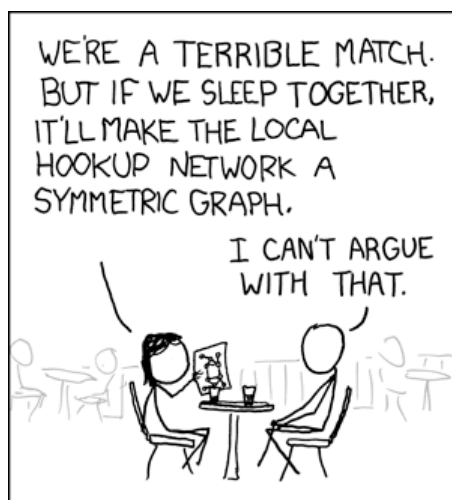




Concours national d'informatique
Épreuve écrite d'algorithmique
Bordeaux, Toulon et Lyon I

Samedi 14 février 2015

CES SENTIMENTS, JE LES CONNAIS



XKCD – « Convincing Pickup Line »
(auteur : Randall Munroe)

1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

Conseils

- Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
- **Soignez la présentation** de votre copie.
- N'hésitez pas à poser des questions.
- Si vous avez fini en avance, relisez bien.
- N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

- Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
- Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
- Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
- Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe.
- Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
- Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

2 Sujet

2.1 Partie 1

Il était une fois une Académie mystérieuse au Japon, réservée à une élite qui ne lâche pas facilement ses secrets...

Dans ce haut lieu d'éducation artistique, l'attention des élèves se porte surtout sur les affaires sentimentales, et en particulier sur la dernière rupture dramatique. Le tout-puissant conseil des étudiants¹ organise même un jeu sur ces relations – sans laisser les autres élèves s'en douter. Ils ont déjà compilé, grâce à leurs informateurs dans chaque classe, une liste complète de toutes les personnes ayant quitté leur partenaire. Le jeu oppose les deux membres les plus importants du comité :

- Le président, voulant le bonheur de la communauté veut trouver un couple potentiellement stable, il veut donc qu'au moins un des deux membres du couple n'ait jamais quitté personne.
- La trésorière, qui est la principale bénéficiaire des recettes de la gazette de l'Académie, veut au contraire induire une spirale infernale de haine et de drame romantique.

Dans la première version du jeu, les joueurs ne considèrent que des couples fille-garçon². On choisit donc un ou une élève de l'Académie et les deux joueurs alternent, choisissant à chaque fois une nouvelle victime ayant été quittée par l'élève précédent. Si on arrive sur un innocent n'ayant quitté personne, le président gagne la partie, alors que toute répétition d'une personne déjà choisie, présage d'une boucle infinie, fait gagner (de l'argent à) la trésorière.

Précisions

- On numérote les garçons de l'Académie de 0 à $n - 1$, et les filles de 0 à $m - 1$. L'ordre lui-même n'a rien à voir avec l'ordre alphabétique mais les élèves s'en sortent bien tout de même, et ne voient pas de problèmes à être identifiés par un matricule.
- Certains couples se sont mutuellement quittés, dans ce cas ils sont tous les deux dans la liste de ceux quittés par l'autre.
- On considère (pour le moment) qu'on commence avec³ un garçon et que c'est le président qui joue le premier coup.

Question 1

(1 point)

Les informateurs du conseil ont déniché les ragots suivants sur un petit groupe d'amis :

Chihiro a plaqué Ichigo car il lorgnait Konata. Konata quitta Akira pour se mettre avec Ichigo mais les deux décidèrent de rompre. Shinji, ami d'Ichigo décida alors de s'amuser avec Chihiro puis Konata ce qui ne plut pas tellement à Misato mais il la délaissa aussi avant qu'elle ait le temps de se plaindre.

Donner des tableaux à double entrée représentant pour cet exemple :

- pour chaque fille, quels garçons elle a quitté ;
- pour chaque garçon, quelles filles il a quitté.

1. *seitokai* chez les japonais, ou Bureau des Élèves chez les étudiants
2. L'hétéronormativité, c'est Mal.
3. Et non pas « sur », sinon c'est sale.

Question 2

(1 point)

Donner une fonction qui prend les deux tableaux précédents et renvoie un tableau des ex-couples.

Question 3

(4 points)

Le conseil des étudiants a de grandes ambitions pour l'Académie et veulent qu'elle rassemble toutes les Académies du Japon, et à terme toute la population terrestre sous son égide. Le problème est que le jeu deviendrait alors très long, et ils ont besoin d'une procédure pour vérifier que la séquence de coups qu'ils ont jouée correspond bien à un déroulement normal et que personne n'a triché.

- (a) Écrire une fonction qui vérifie qu'une séquence de personnes constitue bien une partie valide, c'est-à-dire que chaque personne a bien quitté la personne suivante dans la liste.
- (b) Tant qu'à faire, ils aimeraient bien savoir si l'un d'entre eux a gagné sans s'en rendre compte. Écrire donc une fonction qui indique si l'un des deux a gagné, et si oui lequel. On rappelle les conditions de victoire :
 - pour le président : arriver sur une personne qui n'a jamais quitté personne ;
 - pour la trésorière : provoquer la répétition d'une personne dans la liste.

Question 4

(4 points)

Grâce à l'apport personnel et confidentiel d'un de ses amis, le président prend conscience de leur erreur et décide avec la trésorière de tenir compte des relations ne rentrant pas dans le cadre hétérosexuel. Les deux continuent à jouer mais cette fois dès qu'on arrive sur un garçon c'est au président de choisir la prochaine victime (qui pourra être une fille ou un garçon) et réciproquement avec la trésorière et les filles.

- (a) Comment modifier la présentation des données pour prendre cela en compte ?
- (b) Décrivez les adaptations nécessaires aux trois dernières fonctions pour ce jeu étendu.

Question 5

(9 points)

Le président misant sur sa victoire (et ne pouvant pas se permettre de perdre, contrairement à la trésorière), il ne veut pas simplement jouer au hasard. Il essaye donc déjà de trouver les positions où il est sûr de gagner en un coup imparable. Pour cela, il invite un otaku programmeur états-unien venu en pèlerinage : Gary G. Jr, qui est prêt à l'aider bénévolement en échange de reconnaissance sociale.

- (a) Écrire une fonction qui prend comme argument les tableaux des ruptures et renvoie cette liste de positions.
- (b) Le président ayant récemment investi la majorité de ses économies dans une calculatrice programmable, il peut même se permettre de calculer les positions où il peut gagner systématiquement en deux coups (à condition de jouer correctement). Écrire cette fonction.
- (c) Comment feriez-vous si le président vous demandait de regarder i coups à l'avance ?

Question 6

(9 points)

Jusqu'ici les deux joueurs choisissaient l'élève de départ à l'aveugle. Le président aimerait cependant savoir quels sont les élèves de départ qui lui permettent de gagner (afin de ne pas trop miser). Il cherche donc un tableau qui lui dit le nombre minimal de coups nécessaires pour être sûr de gagner à partir de chaque élève. La tableau doit aussi signaler si le président n'est pas certain de gagner à partir d'un élève.

- (a) Y a-t-il une limite au nombre de coups qu'il faut prévoir avant de savoir qui gagne ?
- (b) Écrire une fonction qui renvoie le tableau voulu.

On peut désormais considérer que le président est en possession du tableau.

Question 7

(7 points)

- (a) Savoir si on gagne est utile, mais savoir comment l'est encore plus. Écrire donc une fonction qui renvoie un coup permettant au président de gagner à partir de chaque position où c'est possible.
- (b) Comment le président doit-il faire usage de cette fonction pour garantir sa victoire dans une partie l'opposant à la trésorière ?

Question 8

(5 points)

Gary G. Jr, qui vient tout droit du Wisconsin, ne veut pas avoir l'air louche dans les couloirs en se promenant avec des classeurs entiers avant de parier avec la trésorière.

- Comment minimiser la mémoire nécessaire pour l'application de la stratégie ?

Question 9

(9 points)

La trésorière tombe sur les classeurs de Gary et découvre le tableau calculé en question 6. Elle décide alors de l'utiliser pour trouver comment gagner à son tour.

- (a) Montrer que si le président n'est pas sûr de gagner, la trésorière a de son côté un combo mortel lui assurant la victoire.
- (b) Expliquer comment calculer les coups gagnants pour la trésorière.
- (c) Peut-elle aussi minimiser l'espace nécessaire pour exécuter sa stratégie ?

Partie 2

Après que le jeu ait été rendu public et que les deux responsables aient été chassés, le nouveau comité a décidé de rendre le graphe des ex-couples moins rempli de négativité et de ressentiments en oubliant l'information sur qui, dans chaque couple, a initié la rupture.

Question 10

(2 points)

Justifier qu'après oubli de l'orientation du graphe, le jeu de la partie 1 devient trivial.

Le nouveau bureau voulait ainsi éliminer ces loisirs malsains en les rendant inintéressants, mais on ne bride pas la volonté de divertissement du peuple ; aussi, une variante du jeu s'est développée qui ne se termine en théorie jamais, mais où on va chercher à persuader l'autre qu'il devrait abandonner.

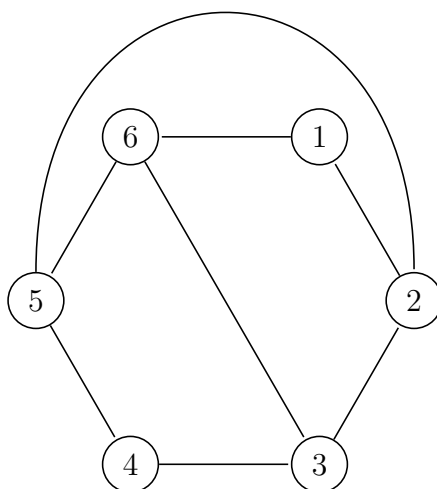
Tout comme précédemment, les deux joueurs nomment tour à tour des personnes, chacune ayant été en couple avec la précédente, et le joueur ayant la main dépend du sexe de la dernière personne citée. Cependant, l'objectif ici est, pour le premier joueur, que *parmi les numéros des personnes qui reviennent infiniment dans la liste, le plus petit soit pair* ; rappelez-vous que chaque personne dispose d'un matricule. Si le premier joueur ne gagne pas, le second joueur gagne (la victoire n'étant décidée qu'après une infinité de coups).

Question 11

(7 points)

Sur l'exemple suivant, où les noms ont été cachés pour protéger la vie privée des gens concernés⁴, qui gagnerait si on commençait par la personne désignée par le numéro 1 ?

Le schéma indique les ex-couples ; 1, 4, 5 sont des hommes, et 2, 3, 6 sont des femmes.



Question 12

(19 points)

Gary, préférant de loin ce nouveau jeu, a fait profil bas et est resté à l'Académie.

Comment peut-il réutiliser les techniques précédentes savoir à partir de quelle position il a une stratégie gagnante ?

4. Quant aux personnes mentionnées au début du sujet, elles étaient fondamentalement mauvaises, donc méritaient la divulgation de leurs ragots.

Partie bonus

Question bonus 13

(1 point)

Un élève propose un nouveau jeu : cette fois le but est que le plus d'élèves possible soient en couple⁵. On a cette fois la donnée de toutes les attirances entre les individus. Proposer un algorithme créant un nombre maximal de couples (la polyamorie n'étant pas prise en compte).

Question bonus 14

(1 point)

L'ancien comité profite de ces nouveaux dénouements pour tenter de ressusciter en secret le jeu original, cependant ils ont un peu changé les règles.

Ils ont à nouveau la liste des ex-partenaires de chaque personne, *uniquement parmi les couples hétérosexuels*. La trésorière commence par choisir un garçon, et le président lui donne une de ses ex, et chacun alterne en donnant un ou une ex de la dernière personne mentionnée sans répéter un nom déjà prononcé. Comment décider qui gagnera si les deux jouent de manière optimale ?

On pourra exploiter l'algorithme de la question précédente.

Question bonus 15

(1 point)

Si on oriente les transitions dans le jeu de la partie 2, montrer que la détermination du gagnant est dans $NP \cap coNP$.

Question bonus 16

(1 point)

JJ. débarque à l'Académie, il porte un T-shirt vert et un pantalon blanc.

▮ Combien de personnes arrive-t-il à séduire en 2 semaines ?

Indication : on pourra appliquer la formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

FIN

Le sujet comporte 6 pages (sans compter la page de garde) et 16 questions, parmi lesquelles 4 questions bonus. Les questions normales sont notées sur 77 points, et les questions bonus rapportent au total 4 points, plus 1 points de présentation.

5. Et donc heureux ou malheureux selon les interprétations.