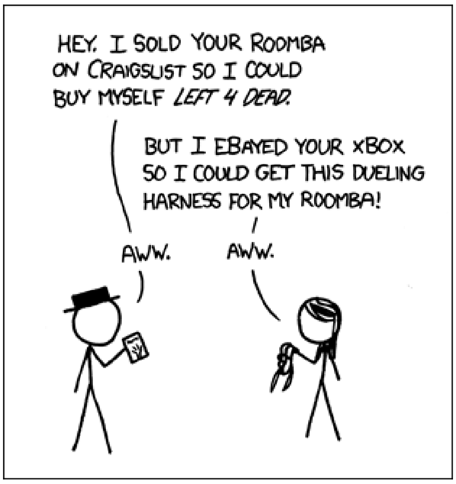
Prologin 2015

Concours national d'informatique

Épreuve écrite d'algorithmique
Lille et Strasbourg

Samedi 7 mars 2015

L'anniversaire de Joseph Marchand



XKCD – « Theft of the Magi » (auteur : Randall Munroe)

1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

Conseils

- Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
- **Soignez la présentation** de votre copie.
- N'hésitez pas à poser des questions.
- Si vous avez fini en avance, relisez bien.
- N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

- Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
- Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
- Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
- Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe.
- Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
- Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

2 Sujet

Introduction

Il est 17h, Joseph Marchand sort d'une projection de *Millennium Actress* en compagnie de son meilleur pote, Jean-Pierre Portmanteau. Après s'être extasié sur la métafiction, Joseph mentionne son projet de dépenser sa copieuse fortune [1] pour offrir un cadeau à tous les gens qui viendront fêter son anniversaire, même aux parasites qui seront venus sans cadeau.
« Mais, ton anniversaire, c'était pas aujourd'hui ?
— Ah si, mince, j'ai invité plein de personnes pour 20h et j'ai rien préparé ! Vite, Jean-Pierre, tu dois m'aider à acheter des cadeaux en vitesse ! Il n'y a pas de temps à perdre, fonce ! »

Mais dans leur hâte, ils avaient oublié de prendre avec eux la liste des invités ! Ils se retrouvèrent donc avec une pile de cadeaux hétéroclite à refiler aux amis de Joseph. Ô miracle, il y eut autant d'invités que de cadeaux ; mais pourraient-ils donner à chacun un cadeau *satisfaisant* pour autant ?

Dans ce sujet, nous allons tenter de choisir l'attribution des cadeaux aux invités de sorte à maximiser la probabilité que tout le monde soit satisfait. Les données du problème consisteront en un tableau à deux entrées indiquant, pour chaque invité et chaque cadeau, la probabilité (estimée par Jean-Pierre) que cet invité soit content de le recevoir. On s'intéresse dans ce sujet au cas où il y a exactement autant de cadeaux que d'invités (au nombre [2] de n), et où l'on veut attribuer exactement un cadeau à chaque invité.

Voici un exemple sur lequel il est facile de déterminer le choix optimal (indice : il a 81 % de chances de satisfaire les quatre invités) :

	Jean-Pierre	Lise	Ayame	Yann-Joachim
Figurine Akemi Homura	30 %	90 %	100 %	20 %
Gödel, Escher, Bach	100 %	60 %	50 %	1 %
Le fantôme de la transparence	10 %	10 %	10 %	100 %
Leçon de piano gratuite	50 %	70 %	90 %	50 %

Partie I

Question 1 (2 points)

(a) Donner une représentation pour une attribution des cadeaux aux invités. On pourra supposer que les invités ainsi que les cadeaux sont identifiés par des numéros de 0 à $n-1$. Il est conseillé de lire les questions suivantes avant de répondre afin de choisir une représentation adaptée.

(b) Écrire une fonction qui vérifie si une donnée représente une distribution valide des cadeaux (c'est-à-dire que chacun reçoit exactement un cadeau).

(Note : dans ce sujet, les mots « attribution » et « distribution » sont interchangeables qet font tous deux référence au choix de quels cadeaux donner à quels invités.)

1. Les profits du parc d'accrobranche Marchand dépassent les espérances !
2. Joseph Marchand s'est fait beaucoup de connaissances à force d'apparaître dans des exercices de Prologin ; sachez donc que n est suffisamment grand pour que l'impératif de ne pas faire complexer les *geeks* asociaux qui participent à ce genre de concours nous oblige à cacher le nombre exact.

Tout au cours de ce sujet, on va tenter de maximiser la probabilité que *tous* les invités soient contents de leur cadeau.

Pour une attribution des cadeaux donnée, la probabilité que cela se produise est simplement le produit [3] des probabilités que chaque invité soit satisfait à titre personnel (qui sont données par le tableau). Sur l'exemple, si on donne la figurine à Ayame, *GEB* à Lise, *Le fantôme* à Yann-Joachim et la leçon de piano à Jean-Pierre, la probabilité de satisfaction globale sera $1 \times 0.6 \times 1 \times 0.5 = 0.3$, soit 30 %.

Question 2 (1 point)

> Écrire une fonction qui, étant donné le tableau et une distribution valide des cadeaux, calcule la probabilité de satisfaire tout le monde.

Question 3 (2 points)

> Écrire une fonction qui énumère la liste de toutes les attributions valides possibles.

Question 4 (2 points)

> (a) Écrire une fonction qui utilise les deux fonctions précédentes pour déterminer quels cadeaux donner à quels invités pour maximiser la probabilité que l'assistance soit pleinement satisfaite.
>
> (b) Estimer le temps nécessaire à l'exécution de cet algorithme en fonction du nombre n d'invités.

Partie II

Dans cette section, on se limite à tenter de donner le plus de cadeaux possibles sans risquer que quiconque soit insatisfait d'un cadeau qu'il aurait reçu. Autrement dit, *un invité ne pourra recevoir un cadeau que s'il a une probabilité 100 % de l'apprécier*.

Avec de telles contraintes, il ne sera pas toujours possible de distribuer tous les cadeaux ; mais tant pis pour ceux qui se retrouvent sans rien, ils n'avaient qu'à être moins exigeants.

Question 5 (1 point)

> Comment modifier la représentation des attributions de cadeaux pour prendre en compte des attributions partielles (c'est-à-dire où certains invités peuvent ne pas recevoir de cadeau, et certains cadeaux peuvent ne pas être donnés) ?

Question 6 (1 point)

> Donner une fonction qui renvoie de façon simple une attribution partielle non vide, mais non nécessairement optimale, dont on peut être sûr que tous ceux qui recevront un cadeau l'apprécieront.

3. Pour ceux qui s'y connaissent en maths, ça signifie qu'on a affaire à des événements indépendants.

Considérez ce nouvel exemple.

	Ayame	Jean-Phil	Yann-Joachim
Figurine	100 %	42 %	20 %
Ordures	0,5 %	100 %	0,5 %
Vaisselle	50 %	100 %	100 %

On remarque que si Jean-Phil reçoit de la vaisselle, alors Yann-Joachim ne peut plus recevoir un cadeau désirable à coup sûr, et personne ne recevra les ordures, alors que si Jean-Phil reçoit les ordures Yann-Joachim peut recevoir la vaisselle, ce qui est mieux, car ainsi le bonheur du monde se retrouve amélioré par les goûts de chiottes de Jean-Phil.

Ce constat peut se généraliser : considérons un cadeau qui n'a été donné à personne ; il est possible que tous ceux qui seraient prêts (avec probabilité 100 %) à le recevoir aient déjà un cadeau. Dans ce cas, on prend l'un d'entre eux, X, et on échange le cadeau actuel de X avec celui dont on veut se débarasser. On peut ensuite refiler l'ancien cadeau de X à Y, puis l'ancien cadeau de Y à Z, etc. jusqu'à ce que l'on tombe sur quelqu'un qui n'avait pas encore de cadeau et qui veut bien accepter le dernier cadeau de la chaîne. Au bout du compte un cadeau s'est rajouté à l'ensemble des cadeaux attribués.

Un tel cheminement est appelé *échange augmentant* : c'est un enchaînement de réaffectations de cadeaux qui partent d'un cadeau pas encore offert et qui arrivent sur un invité sans cadeau.

Question 7 (3 points)

> Écrire une fonction qui étant donné une attribution partielle recherche un échange augmentant et, s'il existe, renvoie une attribution partielle plus grande.

Question 8 (3 points)

> (a) Écrire une fonction qui modifie l'attribution pour qu'elle distribue des cadeaux en plus, par répétition de la méthode précédente jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'échange augmentant.
>
> (b) Pourquoi le résultat final permet-il de distribuer le nombre maximal de cadeaux possible ?

Partie III

On s'intéresse maintenant à nouveau au problème général, c'est-à-dire que l'on veut que tout le monde reparte avec un cadeau, et ce de façon à maximiser la probabilité de satisfaire tout le monde.

Néanmoins, on fera une hypothèse supplémentaire dans cette partie : *aucune case du tableau des probabilités ne contient de zéro* (autrement dit, on n'est jamais sûr que quelqu'un va rejeter un cadeau).

Question 9 (2 points)

> Montrer que si l'on applique l'une des transformations suivantes au tableau des probabilités, alors les solutions optimales pour le problème défini par le nouveau tableau sont les mêmes que pour le problème original :
>
> — multiplier toutes les cases d'une ligne par le même nombre ;
>
> — multiplier toutes les cases d'une colonne par le même nombre.

Question 10 (3 points)

(a) Écrire une fonction qui effectue la transformation de la question précédente de façon à faire apparaître au moins une case égale à 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne du tableau.

(b) Écrire une fonction qui calcule une solution partielle certaine, au sens de la partie II, du problème obtenu après ces transformations.

(c) En déduire une façon d'obtenir dans certains cas une attribution complète qui maximise la probabilité que tous les invités soient satisfaits.

Question 11 (2 points)

On *suppose* maintenant qu'on sait sélectionner des cadeaux et/ou des invités tels que :

— si un cadeau peut être offert avec satisfaction certaine à un invité, alors l'un des deux est dans la sélection ;

— si de plus cette assignation du cadeau à l'invité en question fait partie de la solution partielle certaine, alors *exactement* l'un des deux est dans la sélection.

Comment rajouter des uns dans la matrice en préservant la solution optimale ?
Indication : utilisez les transformations vues deux questions plus haut.

Question 12 (2 points)

Donner un algorithme pour le problème énoncé au début de cette partie, en justifiant qu'il est correct et qu'il termine.

Question 13 (2 points)

Donner une méthode pour calculer la sélection dont on supposait disposer pour la question 11.

Partie bonus

Question bonus 14 (2 points)

En réalité, les réactions épidermiques bien connues d'invités qu'on ne nommera pas obligent à estimer à zéro certaines probabilités de satisfaction.

(a) On veut distribuer le plus de cadeaux possibles, tout en évitant la situation où l'on est certain qu'au moins une personne n'aimera pas son cadeau. Comment s'y prendre ?

(b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse distribuer *tous* les cadeaux avec une probabilité non-nulle de satisfaction.

Question bonus 15 (2 points)

Soient des candidats aux épreuves régionales de Prologin ; chacun renseigne 3 centres dans lesquels il peut se rendre, et chaque centre dispose d'un nombre limité de places. À l'issue de la sélection, le nombre de candidats gardés est égal au nombre total de places.

> Peut-on affecter chaque candidat à une épreuve régionale en remplissant parfaitement chaque centre ? On se ramènera à un problème précédemment résolu.

Question bonus 16 (1 point)

En admettant que votre correcteur soit corrompu, quel cadeau accepteriez-vous de lui offrir s'il vous permettait d'accéder à la finale du concours Prologin ?

Fin

Le sujet comporte 6 pages, plus une page de garde. Les questions sont au nombre de 16, parmi lesquelles 3 questions bonus. Les questions normales sont notées sur 26 points, et les questions bonus rapportent au total 5 points, plus 1 point de présentation, ce qui fait au total X points.