



Concours national d'informatique
Épreuve écrite d'algorithmique
Louvain-la-Neuve et Lyon II

Samedi 28 février 2015

UNE HISTOIRE DE PARCOURS



“Cycle in a tree”

1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

Conseils

- Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
- **Soignez la présentation** de votre copie.
- N'hésitez pas à poser des questions.
- Si vous avez fini en avance, relisez bien.
- N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

- Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
- Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
- Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
- Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe.
- Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
- Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

2 Sujet

Introduction

Un jour, un certain Joseph Marchand hérita d'une forêt. Sa femme, écologiste dans l'âme, essaya de le pousser à valoriser cette forêt en veillant à ce que la faune et la flore locale se développent au mieux. Il lui rétorqua tout de suite qu'il n'était pas question que cet héritage lui coûte de l'argent, qu'il voulait au contraire le faire fructifier¹ pour s'enrichir un peu.

« Mais alors tu n'auras qu'à le faire visiter, et faire payer la visite. Des gens viendront de partout pour admirer un tel écosystème ! reprit-elle.

— Non.

— Et tu vas en faire quoi alors ? Planter des billets entre les arbres en espérant qu'ils poussent pour imiter leur environnement ? ironisa-t-elle.

— Très drôle, vraiment ! bougonna-t-il.

— Accepte mon idée, alors...

— Il n'en est pas question. Laisse-moi réfléchir un peu... Je sais ! Je vais en faire un parc d'accrobranche !

— Mais tu n'as strictement aucune idée de comment ça se conçoit ! »

Et elle avait malheureusement raison. Cependant Joseph disposait d'une arme redoutable. Quelqu'un qui pourrait l'assister dans son projet. N'essayez pas de regarder autour de vous au cas où... c'est bien de vous² dont il s'agit !³

Mise en place du parcours

Bon, un parc d'accrobranche c'est bien joli, mais ça ne tombe pas du ciel. Il faut d'abord construire des ponts de singes et autres passages permettant de passer d'un arbre à l'autre⁴. Il faut aussi s'assurer que le parcours est sécurisé, et qu'il ne demande pas trop de temps pour le terminer. Bref, il y a quelques détails à vérifier avant de pouvoir le construire.

Après s'être un peu renseigné sur les câbles de sécurité⁵ qu'il doit mettre parallèlement à chaque passage, Joseph apprend qu'ils ne doivent pas faire plus de 300m. Comme il doit choisir sur quels arbres il mettra des plateformes reliées par des passages⁶, il aimerait que vous lui indiquiez quels arbres il est possible de relier.

Question 1

(2 points)

(a) On vous donne les coordonnées (en mètres) (x, y) de deux arbres. Écrivez une fonction qui indique si on peut mettre un câble de sécurité entre les deux arbres.

Rappel : la distance entre les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est donnée par $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

(b) On vous donne maintenant les coordonnées des n arbres de la forêt. Écrivez une fonction qui renvoie la liste des paires d'arbres entre lesquels on peut mettre un câble de sécurité.

1. Pas directement dans les arbres dont il vient d'hériter, c'est une métaphore !

2. Oui oui, même si vous êtes pour l'écologie !

3. Réfléchissez à un rire machiavélique pouvant conclure ce paragraphe. Si vous en avez un bon, vous pouvez le présenter à l'organisateur que vous aurez lors de l'entretien !

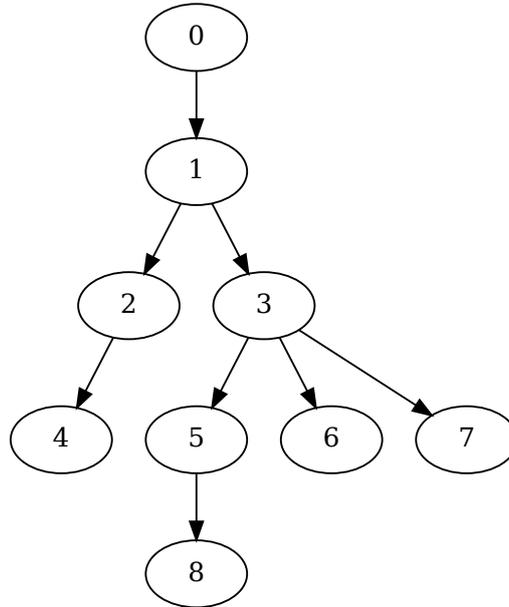
4. De quels arbres parle-t-on au juste, d'ailleurs ?

5. I'm not referring to a whistleblower. Not a metaphor this time baby.

6. On vous avait prévenus !

Remarque : pour cette question on vous demande juste un algorithme qui marche, pas le plus efficace possible.

Grâce à votre aide, Joseph a sélectionné les arbres et construit des plateformes sur ces derniers. Il a aussi conçu et construit un premier parcours. Ce parcours commence d'un unique arbre mais peut avoir plusieurs sorties. Les passages sont à sens unique : si on peut passer de l'arbre i à l'arbre j alors le passage de j à i est impossible. Voici un exemple :



En tout premier lieu, Joseph veut s'assurer que les normes de sécurité sont respectées. En effet, on ne peut pas faire partir autant de passages qu'on veut de chaque arbre. Le nombre maximal autorisé dépend entre autre du poids, de la hauteur et de la flexibilité de l'arbre. De plus, *chaque arbre ne doit être l'arrivée que d'au plus un passage*, comme sur la figure : sinon, cela provoquerait un risque de collision entre des gens venant de passages différents.

Dans toutes les questions qui suivent, vous avez accès à :

- le nombre d'arbres du parcours : n
- le nombre de passages construits : m
- la liste des m passages construits. Un passage est représenté par un couple (i, j) et indique que l'on peut aller de l'arbre i à l'arbre j

Les arbres sont numérotés de 0 à $n - 1$ et on considèrera toujours que l'arbre de départ est l'arbre numéro 0.

Question 2

(4 points)

- (a) Écrivez une fonction qui vérifie :
 - qu'aucun arbre n'est une extrémité (départ ou arrivée) de plus de N passages (où N est une limite de sécurité passée en argument à la fonction) ;
 - qu'aucun arbre n'est l'arrivée de deux passages ou plus.
- (b) Écrivez une fonction qui, lorsque cette deuxième condition est vérifiée, calcule un tableau indiquant pour chaque arbre :
 - s'il est l'arrivée d'un (unique) passage, le départ de ce passage ;
 - -1 sinon.

Ensuite, Joseph veut s'assurer qu'il n'a pas fait d'erreur d'inattention : il se peut qu'il ait oublié d'inclure certains passages et que du coup certains arbres contenant une plateforme ne soient pas accessibles depuis l'arbre de départ.

Question 3

(5 points)

- (a) Écrivez une fonction qui teste si un arbre donné en argument peut être atteint depuis l'arbre de départ en empruntant successivement des passages.
Indication : on pourra aborder le problème dans l'autre sens : peut-on remonter à l'arbre de départ en empruntant à l'envers les uniques passages arrivants ?
- (b) Si l'on veut vérifier que tous les arbres du parcours sont bien accessibles depuis le départ, peut-on s'y prendre de façon plus efficace que de vérifier individuellement chaque arbre ?

Joseph a maintenant rajouté des passages de sorte que maintenant tous les arbres du parcours sont atteignables depuis l'arbre de départ.

Question 4

(1 point)

Écrivez une fonction qui renvoie la liste des arbres qui terminent le parcours, c'est-à-dire ceux desquels on ne peut pas repartir (sur l'exemple précédent il s'agit de $[4, 6, 7, 8]$).

Joseph s'est chronométré sur chacun des passages : désormais, l'information associée à un passage est un triplet (i, j, t) où t désigne le temps en secondes que l'on met en empruntant le passage entre i et j . Il souhaite savoir, à l'aide de ces informations le temps maximum qu'un accrobranchiste mettra pour finir son parcours, quelle que soit la sortie qu'il emprunte.

Question 5

(4 points)

- (a) Écrivez une fonction qui renvoie, pour une sortie donnée, le temps mis pour atteindre cette sortie.
- (b) Comment feriez-vous pour maintenant renvoyer un tableau contenant le temps mis pour atteindre chaque sortie ?

Vengeance

Même si à présent le premier parcours d'accrobranche de Joseph Marchand est opérationnel, il vous a donné quelques semaines de congé. Mais vous êtes aussitôt approché par un étrange personnage : Régis. Régis commence à vous expliquer en détails qu'il a été humilié par Joseph quand il était plus jeune. Vous le coupez pour lui expliquer alors que c'est une bien jolie histoire, mais que vous étiez en train de planifier vos vacances, mais il vous coupe à son tour : « Aide-moi à me venger de Joseph et en échange je te donnerai ce que tu veux⁷ ». N'ayant pas remarqué la note de pied de page à ce moment-là, vous acceptez.

7. Dans la limite des stocks disponibles, photo non contractuelle.

Question 6

(1 point)

Régis vous demande d'abord de lui indiquer une liste de passages qui, une fois détruits, empêcheront d'atteindre une sortie et bloquera ainsi tous les accrobranchistes. Écrivez une fonction qui renvoie une telle liste.

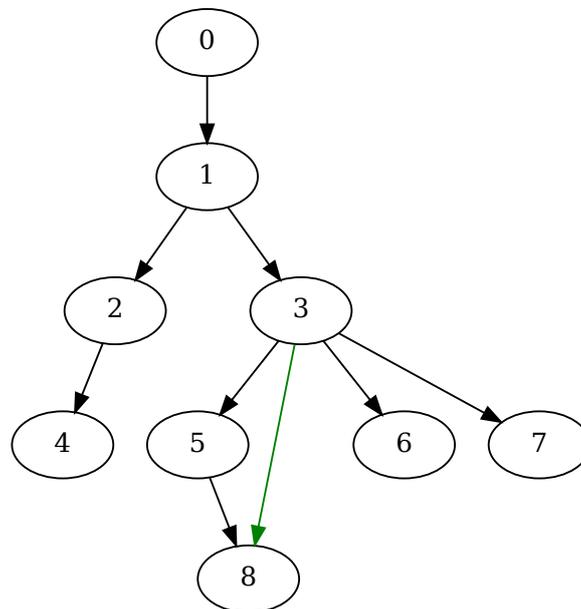
Régis se rend compte que tous les passages ne demandent pas le même effort pour les détruire. Il vous fournit donc un tableau `cout` tel que `cout[i]` est la quantité d'énergie nécessaire pour détruire le i -ème passage de la liste. Il souhaite évidemment détruire certains passages afin qu'après cela aucune sortie ne soit accessible, tout en dépensant le moins d'énergie à cette tâche⁸.

Question 7

(3 points)

Écrivez une fonction qui renvoie une telle liste de passages : en détruisant ces passages aucune sortie ne doit rester accessible, mais la destruction de ces passages doit être la moins coûteuse en énergie pour arriver à cette fin.

Enfin, pendant que vous étiez supposés commencer vos congés, Joseph a décidé de rajouter des raccourcis dans son parcours : si l'on pouvait aller de l'arbre i à l'arbre j par une succession de passages, il est possible qu'il y ait un passage direct entre i et j . L'exemple suivant contient un raccourci, dessiné en vert :



Question 8

(2 points)

Étant données les informations du nouveau parcours, comment modifieriez-vous la fonction précédente afin qu'elle reste efficace ?

⁸. Il sous-entend même qu'il est possible que ce soit vous qui deviez détruire ces passages. Vous avez donc tout intérêt à ce que votre réponse soit correcte ;)

Vengeance⁹

Grâce à votre aide précieuse, Régis a réussi à empêcher l'inauguration du premier parcours d'accrobranche de Joseph Marchand. Mais ce dernier n'a pas dit son dernier mot.

Afin de rendre la tâche de Régis plus difficile, Joseph a décidé, en plus de reconstruire les passages détruits, d'élargir certains passages afin de les rendre traversables dans les deux sens. De plus, il a décidé de garder un unique arbre de départ, mais de supprimer toutes les autres contraintes : il peut désormais y avoir un passage à sens unique ou double sens entre toute paire d'arbre. Notamment, il est peut être possible, en partant d'un arbre, de revenir sur cet arbre après avoir traversé une succession de passages.

Comme Régis n'a pas tenu sa promesse et vous a abandonné sans vous payer, vous décidez de revenir aider Joseph à rendre son parcours le plus résistant possible.

Question 9

(3 points)

Vous avez maintenant la liste des passages à sens unique ainsi que la liste des passages à doubles sens. Écrivez une fonction qui renvoie vrai si tous les arbres qui sont l'extrémité d'un passage sont atteignables.

Question 10

(4 points)

Écrivez une fonction qui indique quelles sont les sorties (les arbres desquels on ne peut pas repartir) ainsi que le temps minimal pour atteindre chacune d'entre elle.

Régis veut empêcher coûte que coûte l'ouverture du parcours de Joseph. Il dispose cependant uniquement de E unités d'énergie.

Question 11

(6 points)

Écrivez une fonction qui renvoie vrai si Régis a assez d'énergie pour détruire certains passages de sorte qu'aucune sortie ne soit accessible.

Partie bonus

Vous avez appris que Régis ne pouvait pas dépenser plus de E unités d'énergie. Joseph souhaite évidemment contrecarrer au maximum Régis. Il vous indique qu'il peut renforcer certains passages afin de les rendre plus difficiles à détruire. En fait, il peut renforcer un ensemble de passages : si l'énergie nécessaire pour détruire un passage était de e_p on peut la faire passer à $e_n \geq e_p$ de sorte qu'on n'a pas augmenté les énergies de plus de x au total¹⁰.

Question bonus 12

(15 points)

Comment répartiriez-vous ces x unités d'énergie de sorte que Régis ne puisse déconnecter aucune sortie ? Si jamais cela n'est pas possible, comment feriez-vous pour que Régis ne puisse déconnecter que le moins de sorties possibles, et si plusieurs solutions sont possibles, pour que ça lui prenne le plus d'énergie possible ? Dans tous les cas, on attend la liste des passages et le nombre d'unité d'énergie que vous leur affectez.

9. La vôtre cette fois-ci

10. Joseph a fait des calculs, au-delà de x il perdrait de l'argent en essayant de renforcer ses passages

Enfin, Joseph s'est rendu compte qu'un problème pouvait subsister : il ne veut pas qu'en faisant de mauvais choix, on mette trop de temps à terminer son parcours.

Question bonus 13

(13 points)

Écrivez une fonction qui, étant donnée une sortie en entrée (en plus du parcours), indique le temps le plus long que l'on peut mettre à l'atteindre en partant de l'arbre de départ (toujours d'après les temps de Joseph).

Question bonus 14

(2 points)

Inventez une blague en rapport avec le sujet et écrivez-la.

FIN

Le sujet comporte 7 pages, plus une page de garde. Les questions sont au nombre de 14, parmi lesquelles 3 questions bonus. Les questions normales sont notées sur 35 points, et les questions bonus rapportent au total 30 points, plus 1 point de présentation, ce qui fait au total 66 points.