

Prologin 2014

Concours national d'informatique
Épreuve écrite d'algorithmique
Paris I

Dimanche 16 février 2014

PROMOGIN

1 Préambule

Bienvenue à **Prologin**. Ce sujet est l'épreuve écrite d'algorithmique et constitue la première des trois parties de votre épreuve régionale. Sa durée est de 3 heures. Par la suite, vous passerez un entretien (20 minutes) et une épreuve de programmation sur machine (4 heures).

Conseils

- Lisez bien tout le sujet avant de commencer.
- **Soignez la présentation** de votre copie.
- N'hésitez pas à poser des questions.
- Si vous avez fini en avance, relisez bien, ou préparez votre présentation pour l'entretien.
- N'oubliez pas de passer une bonne journée.

Remarques

- Le barème est donné à titre indicatif uniquement.
- Indiquez lisiblement vos nom et prénom, la ville où vous passez l'épreuve et la date en haut de votre copie.
- Tous les langages sont autorisés, veuillez néanmoins préciser celui que vous utilisez.
- Ce sont des humains qui lisent vos copies : laissez une marge, aérez votre code, ajoutez des commentaires (**seulement** lorsqu'ils sont nécessaires) et évitez au maximum les fautes d'orthographe, sinon ça va barder.
- Le barème récompense les algorithmes les plus efficaces : écrivez des fonctions qui trouvent la solution le plus rapidement possible.
- Si vous trouvez le sujet trop simple, relisez-le, réfléchissez bien, puis dites-le-nous, nous pouvons ajouter des questions plus difficiles.

2 Sujet

Introduction

L'association Prologin est une association loi de 1901, c'est-à-dire une association à but non lucratif qui relève de la loi du 1^{er} juillet 1901 mise en place par Waldeck-Rousseau (ancien ministre de l'Intérieur, alors président du Conseil¹) et du décret du 16 août 1901². Ainsi, ses moyens de financement reposent sur des aides extérieures, telles que les subventions de l'État, les dons ou encore les partenariats avec des entreprises, écoles ou universités. L'association souhaite donc aujourd'hui faire la promotion³ de ses nombreux sponsors. À ces fins, un mur de l'EPITA⁴ a été choisi pour accueillir des affiches des partenaires⁵ et un appel d'offres a été lancé. Chaque requête devait être composée de 3 informations :

- le texte à afficher ;
- la position de l'extrémité gauche de l'affiche ;
- la position de l'extrémité droite de l'affiche.

Des zillions⁷ de requêtes ont été rassemblées et, les affiches ne devant pas se superposer, il est impossible de toutes les satisfaire. Il faudra donc choisir quelles affiches seront collées, en respectant les positions exprimées dans les requêtes.

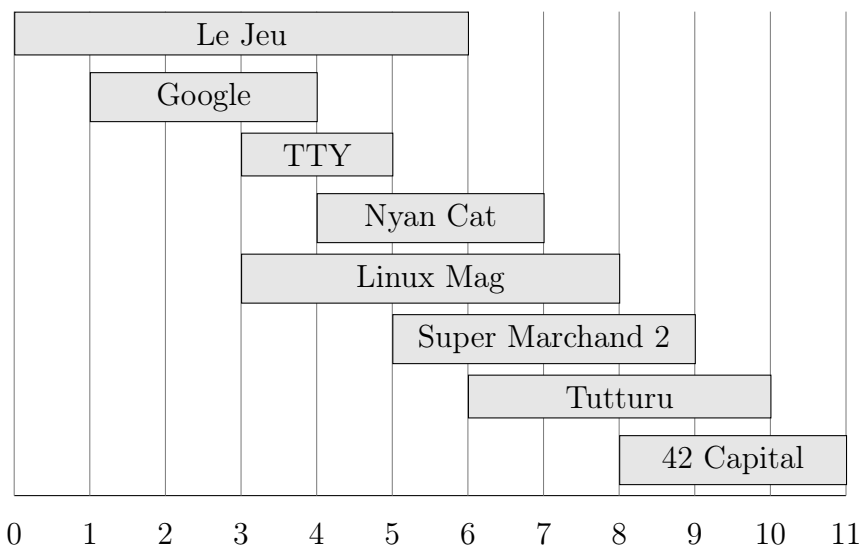


FIGURE 1 – Un exemple de requêtes reçues⁸. Si l'affiche Google est choisie, l'affiche TTY ne pourra pas être collée, mais l'affiche Nyan Cat le pourra⁹.

Les requêtes seront représentées par des couples (d_i, f_i) où d_i est la position de départ de l'affiche $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et f_i sa position d'arrivée. Les affiches de la Figure 1 peuvent donc être représentées par : $(0, 6)$, $(1, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 7)$, $(3, 8)$, $(5, 9)$, $(6, 10)$, $(8, 11)$.

1. Je le sais, j'étais là.

2. Coïncidence amusante : c'était un *vendredi*.

3. Le titre de ce sujet n'était donc pas une vilaine typo.

4. Où d'aucuns prétendent que des candidats seraient justement en train de découvrir le sujet écrit du jour.

5. Tout⁶ nombreux qu'ils soient.

6. Vous ne seriez tout⁶ de même pas tenté de finir ce mot par un S, n'est-ce pas ?

7. N , pour être précis.

8. Par commodité, les demandes ont été représentées à des hauteurs différentes, néanmoins il ne sera pas possible de coller une affiche plus haut qu'une autre¹⁰.

9. Ouf.

10. Pourquoi ? Parce que.

Dans un premier temps, l'association souhaite accepter le plus de requêtes possible⁶.

Question 1 (2 points)

Donner le plus grand nombre d'affiches qu'il est possible de placer sur le mur dans l'exemple de la Figure 1.

Robin, un jeune organisateur Prologin, propose d'accepter les affiches les plus petites en priorité « comme ça, le mur se remplira moins vite et on pourra en mettre plus. »

Question 2 (2 points)

Il semblerait que la stratégie proposée par Robin ne donne pas de très bons résultats. Déterminer une liste de 3 requêtes sur laquelle la stratégie de Robin ne sélectionnera qu'une seule affiche alors qu'il est possible d'en coller deux.

Cyril, un très vieil organisateur Prologin, propose une autre stratégie : « On choisit en priorité les affiches qui en interdisent le moins, par exemple sur la Figure 1, choisir l'affiche 42 Capital n'empêche la sélection que de deux autres affiches, on la prend donc en premier¹¹. »

Question 3 (2 points)

Là encore, cette stratégie ne semble pas être optimale. Déterminer un ensemble de plus de 3 requêtes sur laquelle la stratégie de Cyril ne sélectionnera pas le nombre maximum d'affiches.

Question 4 (3 points)

Avant de continuer, on veut pouvoir s'assurer qu'un ensemble d'affiches est réalisable. Écrire une fonction la plus efficace possible qui prend une liste de requêtes en argument et renvoie 1 si deux affiches quelconques ne se superposent pas et 0 sinon.

À présent, vous pouvez supposer la liste des requêtes triée, à condition de préciser sur votre copie dans quel ordre¹² la liste de couples sera triée.

Question 5 (4 points)

Écrire une fonction qui prend une liste de requêtes en argument et renvoie le nombre maximum d'affiches qu'il est possible de coller sur le mur.

Question 6 (2 points)

Justifiez la correction de votre algorithme à la question précédente.

11. Traduit de l'ancien français.

12. Début croissant, fin croissant, début décroissant puis fin décroissant, etc.

En faisant appel à une entreprise de *money-consuming management consulting*, l'association se rend compte qu'elle pourrait proposer les emplacements de son mur aux enchères, en agréant les requêtes d'un paramètre indiquant le montant que le sponsor est prêt à payer pour que son affiche se trouve à l'emplacement désiré.

Affiche	Le Jeu	Google	TTY	Nyan Cat	Linux Mag	SM2	Tutturu	42 Capital
Montant	2	3	4	2	3	4	5	3

FIGURE 2 – Un exemple de propositions de montant pour les affiches de la Figure 1.

Question 7 (2 points)

Donner un ensemble d'affiches qui rapportera un maximum de roubles¹⁰ à l'association dans l'exemple de la Figure 2.

Question 8 (5 points)

Écrire une fonction qui prend un ensemble de requêtes (de triplets (d_i, f_i, m_i) où m_i désigne le montant associé à la requête $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$) en argument et renvoie le nombre maximum de roubles que peut rapporter un sous-ensemble de requêtes satisfaisable⁶.

Question 9 (3 points)

Devant l'immense succès de l'opération Promogin, l'association Prologin décide d'investir dans l'achat d'une échelle en tungstène expansé, permettant de poser 2 affiches à la même position (la seconde étant posée en hauteur). Écrire une fonction qui renvoie le nombre maximum d'affiches étant donné cette fabuleuse avancée technologique.

Vous pouvez attaquer les questions suivantes si et seulement si vous vous êtes attentivement relu aux questions précédentes et si $P = NP$.

Question bonus 10 (1 point)

Quel est le nom du problème de la question 8 si les requêtes ne contiennent que la taille des affiches, avec placement libre sur un mur de largeur 42 ?

Question bonus 11 (7 points)

Chaque sponsor choisit maintenant deux paires de positions pour son affiche (une au sol et une en hauteur) et exige qu'une seule des deux positions soit occupée. Écrire une fonction qui renvoie 1 s'il est possible de coller toutes les affiches (une par sponsor) sur les deux étages et 0 sinon.

Question bonus 12 (1 point)

Citez vos passages préférés de la loi du 1^{er} juillet 1901.

Le sujet est sur 25 points, et les questions bonus rapportent au total 9 points, plus 1 point de présentation.